$\mathbb{C}$

1. פרקו לגורמים פולינום $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$. הסיקו כי עם a,b,c ממשיים אז $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$ אך ורק כאשר $a+b+c$ חיובי.

2. שתי סדרות מוגדרות ע"י תנאי התחלה $\begin{cases}a_1=1000\\b_1=1\end{cases}$ ונוסחאות נסיגה $\begin{cases}a_{n+1}=a_n^2-b_n^2\\b_{n+1}=2a_nb_n\end{cases}$.

מה גדול יותר: a_{10} או b_{10}?

3. נתון מצולע משוכלל $A_1A_2...A_n$ שמרכזו O. נניח כי $OA_i=1$.

א. חשבו את $A_1A_n\cdot A_2A_n\cdot A_3A_n\cdot...\cdot A_{n-1}A_n$.

ב. בהנחה ש- A_n הוא אמצע הקטע OB, חשבו את $A_1B\cdot A_2B\cdot A_3B\cdot...\cdot A_{n-1}B\cdot A_nB$.

4. כל המספרים הטבעיים חולקו למספר סופי של מחלקות, כאשר כל מחלקה היא סדרה חשבונית. הוכיחו כי יש שתי סדרות עם אותו ההפרש.

5. מהוא הערך הקטן ביותר של $\cos(4x)+2\cos(3x)+3\cos(2x)+4\cos(x)$?

6. נתונות 4 נקודות שונות במישור: A,B,C,D. הוכיחו את אי-השוויונים הבאים:

א. (משפט תלמי) $AB\cdot CD+BC\cdot AD\geq AC\cdot BD$.

ב. $AB\cdot AD\cdot BD+BC\cdot BD\cdot CD+CA\cdot CD\cdot AD\geq AB\cdot BC\cdot CA$.

ג. $\frac{AD^2}{AB\cdot AC}+\frac{BD^2}{BA\cdot BC}+\frac{CD^2}{CA\cdot CB}\geq 1$.

ד. $\frac{AD^3}{AB\cdot AC}+\frac{BD^3}{BA\cdot BC}+\frac{CD^3}{CA\cdot CB}\geq 3MD$, כאשר M היא נקודת מפגש התיכונים של המשולש ABC.

בהצלחה!