תרגיל בגיאומטריה קומבינאטורית

1. קוביה $20\times20\times20$ מורכבת מלבנים $2\times2\times1$. הוכח שאפשר להעביר מחט שיעבור מפאה אחת לפאה מנוגדת ולא יתקע בלבנה.

2. על ישר סומנו $2n-1$ קטעים כחולים ו-$2n-1$ קטעים אדומים. כל קטע אדום חותך לפחות n קטעים כחולים וכל קטע כחול חותך לפחות n קטעים אדומים. הראו כי קיים קטע אדום שנחתך עם כל הקטעים הכחולים וקטע כחול שנחתך עם כל הקטעים האדומים.

3. במישור נבחרו n ישרים. לכל 3 מהישרים קיים מעגל בעל רדיוס 1 שחותך את שלושתם. הראו כי קיים מעגל בעל רדיוס 1 שחותך את כולם.

4. נתונה נקודה במרחב, ונתונים 5772 מישורים, אשר מרחק כל אחד מהנקודה הינו לכל היותר 1. האם זבוב תמיד יכול לעשות מסלול סגור באוויר, שאורכו לא עולה על 13, והוא עובר דרך כל המישורים הנתונים?

5. האם קיים פאון קמור שאחד החתכים המישוריים שלו הוא משולש (חתך זה לא עובר דרך קודקודים) ובכל קודקוד מתכנסים:
א. לפחות 5 מקצועות,
ב. בדיוק 5 מקצועות?

6. נתון משולש ישר זווית שאורך היתר שלו 1. במשולש זה סומנו מספר נקודות. הראו שקיים קו שבור (לא סגור), שקודקודיו הם כל הנקודות שסומנו, וסכום הריבועים של הקטעים שלו קטן או שווה ל-1.

7. נתון מצולע (לא דווקא קמור). מיתר של מצולע הוא קטע, ששתי הקצוות שלו נמצאים על המצולע אבל הנקודות הפנימיות שלו בתוך המצולע. מצאו מספר λ הקטן ביותר, כך שלכל מצולע קיים מיתר שמחלק את שטחו לשני חלקים, ויחס השטחים בין החלק הגדול לחלק הקטן אינו עולה על λ.

8. לשלושה משולשים: לבן, ירוק, ואדום, יש נקודה משותפת פנימית M.
הוכח שאפשר לבחור קודקוד אחד מכל משולש כך שנקודה M תהיה בפנים או על אחת הצלעות של המשולש שנוצר על ידי שלוש נקודות שנבחרו.

9. א. בתוך מצולע קמור נבחרה נקודה P. יהא n מספר צלעות, שעליהן ניתן להוריד אנך (על החלק הפנימי של הצלע ולא על המשכו). יהא N מספר הקודקודים, עבורן הקטע שמחבר את הקודקוד ל-P מחלק את זווית המצולע לשתי זוויות חדות. הראו כי $n=N$.
ב. בתוך פאון קמור נבחרה נקודה P. יהא a מספר הקודקודים, כך שהווקטור מהקודקוד אל P יוצר זוויות חדות עם כל המקצועות שיוצאות מהקודקוד. יהא b מספר מקצועות, עבורן ניתן להוריד אנך מ-P לחלק הפנימי של המקצוע, והקטע הזה יצור זוויות חדות עם שתי הפאות שמכילות את המקצוע. יהא c מספר הפאות, שאפשר להוריד אנך מ-P על החלק הפנימי שלהם ולא על המשכם. מצאו את $a-b+c$.

10. לפאון יש 100 מקצועות.
א. מהו המספר הגדול ביותר של מקצועות שיכול לחתוך מישור, אם הפאן קמור?
אסור שהמישור יעבור דרך הקודקודים.
ב. עבור פאון לא קמור המספר יכול להגיע אפילו ל-96,
ג. אבל לא יכול להיות 100.

11. בדף נייר מלבני יש N חורים מלבניים (צלעות החורים מקבילים לצלעות הדף). רוצים לחלק את הדף למספר קטן של חלקים קמורים. כמה חלקים אפשר להבטיח שיספיקו?

12. האם קיימת פונקציה חח"ע ועל מקבוצת המשבצות של לוח 8×8 לקבוצת הקוביות $1\times1\times1$ שמרכיבות קוביה $4\times4\times4$, שמעבירה כל שתי משבצות סמוכות לשתי קוביות סמוכות?

בתיאבון!