שאלות על מטבעות וניחושים:

1. א. נתונים 27 מטבעות זהים למראה. אחד מהם מזויף והוא יותר קל מהמטבע הרגיל. כיצד לאתר אותו באמצעות שלוש שקילות בלבד על מאזני כף?
ב. האם בשאלה הקודמת אפשר להחליף את 27 במספר יותר גדול?

2*. א. נתונים 12 מטבעות. אחד מהם מזויף, והוא יכול להיות יותר קל או יותר כבד מהאמיתי. כיצד לאתר אותו באמצעות 3 שקילות בלבד על מאזני כף?
ב. האם אפשר לפתור את השאלה עבור 13, 14, או 15 מטבעות ב-3 שקילות?

3. יעל וגיל משחקים משחק. יעל בוחרת מספר מ-1 עד 100, וגיל שואל אותה שאלות שהתשובה עליהן היא "כן" או "לא". המטרה של גיל היא לגלות את המספר.
א. כמה שאלות גיל יצטרך לשאול, עם יעל אף פעם לא משקרת?
ב*. כמה שאלות כיל צריך לשאול, עם מותר ליעל לשקר פעם אחת?

4*. בבסיס יש 100 מחסנים שאינם בדוקים. ברגע שמחסן נבדק פעמיים, אין צורך לבדוק אותו יותר. בכל פעם שמגיעה ביקורת לבסיס, מפקד הבסיס בוחר חלק מהמחסנים שעוד זקוקים לבדיקה. הביקורת מחליטה האם לבדוק את המחסנים שהוא בחר, או לבדוק את כל שאר המחסנים הזקוקים לבדיקה. הביקורות יפסקו ברגע ש-99% מהמחסנים לא יהיו זקוקים לבדיקה. מפקד הבסיס מנסה לסיים את הביקורות כמה שיותר מהר. מה המספר המינימאלי של ביקורות שהוא יכול להבטיח?

5. נתונים מאזניים דיגיטאליים מתוצרת סין בעלי שתי כפות. המאזניים בנויים כך, שכאשר לוחצים על הכפתור מתבצעת שקילה ורואים על הצג את התוצאה: "הכף הימנית כבדה יותר", או "הכף השמאלית כבדה יותר", או "המשקלים שווים". התוצאה מוצגת כתובה בשפה סינית. יש להניח שאין לך ידע בשפה סינית, אבל אפשר להבדיל בין הודעות שונות בסינית.
א. נתונים 5 מטבעות שאחד מהם מזויף (כלומר שונה במשקלו מהמטבעות האמיתיים). יש לאתר את המטבע המזויף ב-3 שקילות על המאזניים הסיניים.
ב*. עד כמה אפשר להגדיל את כמות המטבעות, על מנת שעדיין יהיה אפשר למצוא את המטבע המזויף ב-4 שקילות?

6. א. יוסי גר בבניין גבוה בעל 30 קומות. יש לו שתי כוסות זכוכית. יוסי מבצע מחקר בנושא שמאוד מרתק אותו: מאיזה קומה נמוכה ביותר צריך להפיל את הכוס כך שהיא תשבר. בשביל זה הוא עושה ניסויים מהסוג הבא: הוא מפיל כוסות מקומות שונות של הבניין, ובודק האם הכוס נשברה. עם הכוס לא נשברה, אז הוא יכול להשתמש בה לניסוים נוספים. מהי הכמות המינימלית של ניסוים שהוא יצטרך לבצע?
ב*. הכלל את השאלה ל-K כוסות ו-N קומות.

7. יוסי טוען שהוא כתב תוכנה שמסוגלת להדפיס כל ספרה של $\sqrt{2}$. אחרי שמריצים את התוכנה, ולוחצים N פעמים על ENTER, המחשב מציג את הספרה מספר N של $\sqrt{2}$ אחרי הנקודה העשרונית. המחשב של יוסי לא מחובר לאינטרנט. יש להוכיח שהוא משקר.

8. נתונים 10 שקי מטבעות, כאשר בכל שק יש 1000 מטבעות. חלק מהשקים מלאים במטבעות אמיתיים, וחלק מלאים במטבעות מזויפים. משקל של מטבע אמיתי ידוע ושווה ל-a, משקל של מטבע מזויף ידוע ושווה ל-$a-\varepsilon$. נתונים מאזניים דיגיטליים שעליהם אפשר לבדוק משקל של כל קבוצת מטבעות עם דיוק מושלם. כמה שקילות צריך בשביל לגלות על כל השק, האם הוא מלא במטבעות אמיתיים, או במזויפים?

9. 10 מטבעות מסודרים בשורה. בין המטבעות יש גם אמיתיים, שמשקלם 7 גרם כל אחד, וגם מזויפים שמשקלם 8 גרם כל אחד. נתון שכל מטבע מזויף נמצא מימין ביחס לכל מטבע אמיתי. האם אפשר באמצעות שתי שקילות בלבד על מאזני כף למצוא את כל המטבעות האמיתיים? אם כן, הראה כיצד לעשות זאת, ואם לא, הסבר מדוע. (במאזנים שניתנו אפשר רק לבדוק על איזו מהכפות יש משקל גדול יותר. המאזנים לא מראים את המשקל, ולא ניתנו משקולות נוספות.)

10. במרתף בטירה של המלך יש 1000 חביות של יין. אחת מהחביות הורעלה ברעל איטי: מי שישתה ממנו ימות תוך יום. בבית הסוהר של המלך יש 10 אסירים, שנידונו לעונש מוות. האם המלך יכול תוך יום אחד לאתר את החבית המורעלת, בתנאי שהוא מוכן להקריב לטובת הבדיקות רק את 10 האסירים?
ב. אותה השאלה רק עבור 240 חביות יין, 5 אסירים, והמלך רוצה לארגן מסיבה בעוד יומיים.

11*. קוסם מבצעה קסם הבא: מתוך ערימת קלפים רגילה (52 קלפים), עוזר של הקוסם מקבל חמש קלפים. עוזר מראה ארבע מהם לקוסם, ואז קוסם אומר את הקלף החמישי. כיצד לבצעה את הקסם?

12. מול עודד נמצאות 100 קופסאות סגורות שבכל אחת מהן יש קובייה אדומה או כחולה. בחשבון של עודד יש שקל אחד. הוא ניגש לקופסה סגורה כלשהי, מנחש את צבע הקובייה שיש בפנים ומהמר על סכום כלשהו (מותר גם להמר על מספר לא שלם של אגורות, אבל לא יותר מהסכום שיש לעודד ברגע זה בחשבון). כאשר הקופסה נפתחת, סכום הכסף שהוא הימר עליו מתוסף לחשבונו או יורד מחשבונו, תלוי אם הוא ניחש נכון או לא.
המשחק ממשיך עד שפותחים את כל הקופסאות. איזה סכום מרבי יכול עודד להבטיח לעצמו אם ידוע לו כי
א. יש בדיוק קובייה כחולה אחת.
ב*. יש בדיוק N קוביות כחולות.
(עודד יכול להמר גם על 0 אגורות, כלומר לפתוח קופסה כלשהי בחינם).

13. ארגון טרור בינלאומי החליט לפוצץ אחד מבין 100 היעדים המרכזיים בארצות הברית. ה-FBI מסוגל לאבטח רק 3 יעדים. למרבה המזל, ה-FBI הצליחו גם לתפוס מספר מחבלים שיודעים איזה יעד יפוצץ. ב-FBI יש שיטת חקירה מתקדמת. בשיטה זו אפשר לשאול את המחבל שתי שאלות של כן\לא, המחבל יאלץ לענות על שתיהן, ולפחות אחת משתי התשובות שלו תהיה נכונה. אחרי התחקיר בשיטת FBI המחבל יהפוך ללא שימושי. מהי הכמות הקטנה ביותר של מחבלים שצריך לתחקר?