

מה הסיכוי?

1. באולימפיאדה מתמטית במדינה זרה השתתפו 200 מתחרים בדיוק, והיו בה 6 שאלות בדיוק. מכיוון שהם די קשוחים, כל שאלה נפתרה על ידי לפחות 120 מתחרים. הוכיחו שיש שניים שביחד פתרו.

2. במישור 10 נקודות. תוכיחו שאפשר לכסות אותם באיחוד זר של מטבעות שקל.

3. נתונה קבוצה S של שלמים חיוביים שונים. הוכיחו שאפשר לבחור תת-קבוצה בגודל $\frac{1}{3}|S|$ שאין בה פתרון למשוואה $a+b=c$.

4. נתונים $a,b,c\geq 0$ המקיימים $a+b+c=1$, ומספר טבעי m. הוכיחו כי

$$\left(1-a^m\right)^m+\left(1-b^m\right)^m+\left(1-c^m\right)^m\geq 2.$$

5. נתונות קבוצות $A_1,...,A_m$ בגודל a כל אחת וקבוצות $B_1,...,B_m$ בגודל b כל אחת, כאשר a ו-b מספרים טבעיים מסוימים. נתון כי A_i ו-B_j זרות אך ורק כאשר $i=j$. הוכיחו כי $m\leq\binom{a+b}{a}$.

6. האם קיים מצולע משוכלל כזה שלקבוצת הקודקודים שלו V יש תת-קבוצה $S\subset V$ שהיא לפחות 99% מגודל הקבוצה, אבל אף 10 סיבובים של S לא מכסים את V?

בהצלחה!