שטח מכוון

1. הוכיחו את הזהויות: (א) $f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = \pm 1$, (ב) $f_n f_{n+3} - f_{n+1}f_{n+2} = \pm 1$.

2. נחלק את כל שאריות מודולו 101, חוץ מ-0, לשני סוגים: חיוביים ושליליים. השאריות 1, 2, 3, ..., 50 נחשבות חיוביות, והשאריות $-1, -2, -3, \ldots, -50$ שליליות. כעת נגדיר "סדר", עבור כל שתי שאריות שונות: a גדול מ-b אם $a-b$ חיובי.
כל 101 השאריות השונות סודרו במעגל בסדר אקראי (המעגל מכוון נגד כיוון השעון). בכל שלב, מוצאים מספר כלשהו במעגל שאחריו יש מספר יותר קטן, ומחליפים בין שני המספרים. האם יתכן שבמשחק זה יהיו אינסוף מהלכים?

3. פלינדרום הוא מילה שהיא אותו דבר כאשר קוראים אותה מההתחלה או מהסוף.
א. יוצרים מילה לפי הכלל הבא: מתחילים מהמילה הריקה ובכל שלב ניתן להכניס למילה הנוכחית את אחת המילים abc, bca, cab בין שתי אותיות סמוכות, או בהתחלה, או בסוף. האם ניתן באופן זה לקבל פלינדרום?
ב. מבצעים את אותו התהליך, אבל מותר להשתמש גם במילים cba, acb, bac. מהלך נקרא מסוג ראשון אם מכניסים את אחת המילים abc, bca, cab, ומסוג שני אחרת. בסוף התהליך התקבל פלינדרום. האם כמות המהלכים מסוג ראשון בהכרח שווה לכמות המהלכים מסוג שני?

4. במישור מצויר קו שבור סגור שחותך את עצמו. הוא חותך את כל צלע של עצמו בדיוק פעם אחת, ודרך כל נקודת חיתוך עוברות בדיוק שתי צלעות. האם יכול להיות שכל נקודת חיתוך מחלקת כל אחת מבין שתי הצלעות שעוברות דרכה לשני חלקים שווים?
(הקו השבור לא חותך את עצמו בקודקודים ואין צלעות עם קטעים משותפים).