

אקוריומים



על השולחן יש N אקוריומים. בראשון יש דג אחד, בשני 2 דגים, בשלישי 3 דגים, וכך הלאה, באחרון יש N דגים. **וָסילי** ו**בֶּרס** משחקים בתורות. בכל תור, מותר לבחור שני אקוריומים שמספר הדגים בהם שונה אבל מאותה זוגיות, ולהעביר דגים מאקוריום אחד לשני כך שתהיה אותה כמות של דגים בשני האקוריומים. מי שלא יכול לעשות מהלך בתורו מפסיד (וסילי מתחיל).

אנו נחקור שאלות הבאות שקשורות למשחק זה:

I. מי מנצח (התשובה תלויה ב-N), וכיצד עליו לשחק?

II. איזה מצב סופי עשוי להיות במשחק זה?

III. כמה מהלכים יכול להימשך המשחק?

1. בסוף המשחק, סופרים את כמויות הדגים בכל אקוריום. כמה מספרים שונים יכולים להתקבל (התשובה תלויה ב-N)?

2. בהנחה ש- $N=50$, האם יתכן שבסוף המשחק
א. יש 25 אקוריומים של 42 דגים, ועוד 25 אקוריומים של 9 דגים?
ב. יש 25 אקוריומים של 39 דגים, ועוד 25 אקוריומים של 12 דגים?

3. הוכיחו כי אם N ראשוני, אז המצב בסוף המשחק מוגדר ביחידות.

נניח שבסוף יש K_a אקוריומים עם a דגים, ועוד K_b אקוריומים עם b דגים, $a<b$.
השארה מרכזית. מצב סופי a,K_a,b,K_b הוא בר השגה אם מתקיימים שני תנאים:

(א) $K_a+K_b=N$, $aK_a+bK_b=\frac{N(N+1)}{2}$.

(ב) $K_a\le 2a-1$ (תנאי מז'וריזציה).

4. הוכיחו כי התנאים האלה הכרחיים.

5. נניח כי $N=2L+1$.
א. הראו שהמשחק הקצר ביותר מורכב מ- L מהלכים.
ב. הראו שהמשחק יכול לכלול לכל היותר $\frac{L(L+1)(2L+1)}{6}$.
ג. האם כמות המהלכים במשחק יכול היות המספר של סעיף ב'?

6. נחשוב על משחק הפוך: בהתחלה יש N אקוריאומים, בכל אחד $L+1$ דגים. בכל מהלך מעבירים דג מאקוריום לאקוריום אחר, שהייתה אותה כמות של דגים. הוכיחו כי המצב הסופי במשחק מוגדר ביחידות.

7. בקודקודים של גרף קשיר נמצאים אנשים. כמות הכוללת של אנשים אינה עולה על כמות הקודקודים. בכל מהלך בוחרים קודקוד שדרגה שלו קטנה מגמות האנשים שנמצאים בו, ושולחים מהקודקוד הזה שליח לכל עיר סמוכה. המשחק נגמר כאשר אין יותר מהלכים. הוכיחו שכמות המהלכים עד לסוף המשחק, וכמות אנשים בכל עיר בסוף המשחק לא תלויים בבחירת סדר המהלכים.

8. (אולימפיאדה אוקראינית ארצית 2016) נתונה טבלה ריבועית $n \times n$. באחת המשבצות נמצאים n^2 אסימונים, משבצות אחרות ריקות. מותר בכל מהלך לקחת שני אסימונים באותה משבצת, ולהזיז אותם לשתי משבצות סמוכות (לפי צלע או קודקוד) בכיוונים הפוכים מהמשבצת המקורית. האם יתכן שבסוף המשחק יהיה אסימון אחד בכל משבצת, בהנחה ש-

א. $N = 2016$?

ב. $N = 2017$?

9. נניח שלפי בכללים של השאלה הקודמת מצליחים להשיג את המטרה (עבור N מסוים). הראו כי כמות המהלכים במקביל לאלכסון אחד שווה לכמות המהלכים במקביל לאלכסון אחר.

10. בשאלת האקווריומים, בהינתן $N = 50$,

א. האם אפשר להשיג $K_{13} = 25 = K_{38}$?

ב. האם אפשר להשיג $K_{25} = 25 = K_{26}$?

11. עבור $N = 12$, האם ניתן להשיג $a = 5, b = 8$?

12. עבור $N = 14$, האם ניתן להשיג $a = 6, b = 9$?

13. בשאלת האקווריומים, בהינתן $N = 50$,

א. האם אפשר להשיג $K_{14} = 25 = K_{37}$?

ב. האם אפשר להשיג $K_{24} = 25 = K_{27}$?

14. טענה מרכזית. נניח שסכום הדגים באקווריומים הוא 0 (יש כאלה אם כמות שלילית של דגים), ולפחות רבע מהאקווריומים ריקים. הוכיחו שאפשר להגיע למצב שכל האקווריומים יהיו ריקים.

15. הוכיחו את ההשארה המרכזית.

בתאבון!