טורן

טענה. גרף נטול c-קליקות עם n קודקודים מכיל:

א. קודקוד מדרגה $\left\lfloor \frac{c-2}{c-1}n \right\rfloor$ לכל היותר.

ב. לכל היותר $\frac{c-2}{c-1}\cdot\frac{n^2-r^2}{2}+\binom{r}{2}$ קשתות, כש-r היא שארית בחלוקה $n:(c-1)$.

1. יש 2001 ערים, כך שכל עיר מחוברת לפחות עם 1600 ערים אחרות. מצאו n מינימלי עבורו חייבת להיות n-קליקה.

2. על מעגל נבחרו 21 נקודות. הוכיחו שיש לפחות 100 זוגות של נקודות, שיוצרות זווית שאינה גדולה מ-120°.

3. בוועידה יש n נציגים, שכל אחד יודע לכל היותר k שפות. בין כל 3 נציגים, לשניים יש שפה משותפת. עבור k נתון מצאו n מינימלי, כך שניתן למצוא שפה עם שלושה דוברים לפחות.

4. בגרף $2n$ קודקודים, n^2+1 קשתות. הראו שקיימים שני משולשים שונים בעלי צלע משותפת.

5. נתונות 101 תתי קבוצות של $\{1,2,...,n\}$. גודל האיחוד של כל 50 קבוצות הוא מעל $\frac{50}{51}n$. הוכיחו שקיימות 3 קבוצות, כך שבכל שתי קבוצות יש איבר משותף.

6. נתון גרף בעל n קודקודים. נסמן ב-Δ את כמות המשולשים ועוד כמות המשולשים בגרף המשלים.

א. אם הגרף הוא d-רגולרי, אז $\Delta=\binom{n}{3}-\frac{nd(n-d-1)}{2}$.

ב. אם בגרף k קשתות. אז $\Delta\geq\frac{n(n-1)(n-5)}{24}+\frac{2}{n}\left(k-\frac{n^2-n}{4}\right)^2$.

7. הראו שבגרף בעל n קודקודים ו-k קשתות יש לפחות $\frac{k}{3n}\left(4k-n^2\right)$ משולשים.

8. נתונות $5n$ נקודות במישור. הן קצוות של $10n^2+1$ קטעים, שצבועים בשני צבעים. הוכיחו שיש משולש מונוכרומטי.

9. בגרף n קודקודים. מהי הכמות המרבית של הקליקות המקסימליות?

בהצלחה!