אי-שוויון המשולש

1. מה התנאי לכך, שמהקטעים a,b,c,d בסדר זה ניתן להרכיב מרובע? הכלילו למצולע בעל יותר צלעות.

2. טרפז הוא מרובע קמור, ששתי צלעות נגדיות שלו מקבילות, ושתי צלעות אחרות לא. האם קיימים שני טרפזים, שאורכי הבסיסים של הטרפז הראשון הם a,c ושל השוקיים b,d, ובו זמנית אורכי השוקיים הטרפז השני הם a,c ושל הבסיסים b,d?

3. נתון משולש חד-זוויות ABC. מצא את הנקודה, שסכום המרחקים ממנה לכל הקודקודים והמרחקים ממנה לכל הצלעות (הסכום הכולל של שישה מרחקים) יהיה קטן ככל האפשר.

4. נתון מרובע קמור ABCD. מצאו את הנקודה P עבורה PA + PB + PC + PD יהיה קטן ככל האפשר.

5. מה יותר גדול: סכום הצלעות של מחומש קמור או סכום אלכסוניו?

6. נקודה D נמצאת בתוך משולש ABC. הוכח כי AD + DC < AB + BC.

7. מצולע קמור α נמצא בתוך מצולע קמור β. הוכיחו כי ההיקף של α קטן מההיקף של β.

8. האם בן-אדם יכול לעשות חור שהוא יוכל לעבור דרכו בדף נייר שקטן ממנו בהרבה?

9. הוכח שבכל ארבעון (פירמידה משולשת) ניתן לחלק את המקצועות לשתי שלשות, כך שמכל שלשה יהיה ניתן להרכיב משולש.

10. הוכח כי ההיקף של משולש חד זוויות גדול מפעמיים הקוטר של המעגל החוסם.

11. במשולש נסמן ב-P את סכום כל הצלעות, וב-T את סכום כל התיכונים. מצאו את ה-M הקטן ביותר ואת ה-m הגדול ביותר, כך שלכל משולש יתקיים $m \le T/P \le M$.

12. במרובע (קמור) P הוא ההיקף, D סכום האלכסונים. מצאו את ה-M הקטן ביותר ואת ה-m הגדול ביותר, כך שלכל מרובע יתקיים $m \le D/P \le M$.

13. א. נקודה נמצאת בתוך משולש שצלעותיו a,b,c במרחק p,q,r מהקודקודים. הוכיחו כי $p+q+r < a+b+c$.

ב. נניח בנוסף, כי הצלע a היא הקטנה ביותר הוכיחו כי $p+q+r < b+c$.

14. בפירמידה משולשת PABC, הזוויות $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA$, והבסיס ABC הוא משולש משוכלל. הוכיחו כי PA = PB = PC.

בהצלחה!