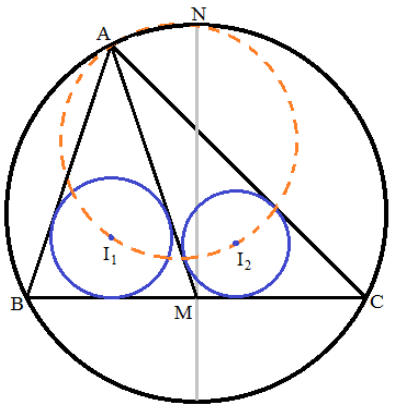
שאלה מהאולימפיאדה הרוסית (של מ. קונגוז'ין)



במשולש ABC שאינו שווה-שוקיים, העבירו תיכון AM. הנקודות I_1 ו-I_2 הן מרכזי המעגלים החסומים המשולשים ABM ו-ACM. הנקודה N היא אמצע הקשת BAC.

משפט. A, I_1, I_2, N נמצאות על מעגל אחד.

1. יהיו J_1 ו-J_2 מרכזי המעגלים החסומים מבחוץ המשיקים לצלעות AB ו-AC בהתאמה. אז N היא האמצע של J_1J_2.

2. יהי I מרכז המעגל החסום במשולש ABC. הוכיחו שהמשולשים IBC ו-IJ_1J_2 דומים, והדמיון הזה מעביר M ל-N.

3. נתבונן במעגל γ שעובר דרך A, I_1, I_2. נניח ש-γ פוגש את BI ואת CI שנית בנקודות P_1 ו-P_2 בהתאמה. הוכח כי P_1P_2 הוא קוטר של γ.

4. השלימו את הוכחת המשפט.

5. מצאו הוכחה נוספת למשפט זה, בתנועה אחת, ללא שלבים.