תרגיל בתורת המספרים

1. מצאו את כל הראשוניים מהצורה m^4+4n^4.
2. המספרים הטבעיים a ו- b מקיימים ש- $15a+16b$ ו- $16a-15b$ שניהם ריבועים של מספרים טבעיים. מצאו את הערך הקטן ביותר האפשרי של המספר הקטן מבין שני ריבועים אלה.
3. מצאו את כל זוגות הטבעיים (a,b) עבורם מתקיים $ab^2+b+7 \mid a^2b+a+b$.
4. מצאו את המספר n המינימלי עבורו קיימים טבעיים $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$ המקיימים:
$$\left(1-\frac{1}{s_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{s_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{s_n}\right)=\frac{51}{2010}$$
5. הוכיחו שלכל זוג מספרים טבעיים k ו- n קיימים k מספרים טבעיים $m_1, m_2, \ldots, m_k$ עבורם
$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{m_k}\right)$$
6. יהא $p>2$ ראשוני. הוכיחו שמבין המספרים $1,2,\ldots,\left\lfloor\sqrt{p}\right\rfloor+1$ יש שארית לא-ריבועית.
7. יהא p ראשוני. הפולינום $P(x)=x^2+x+p$ מקבל ערכים ראשוניים עבור כל $0\le x\le\sqrt{p/3}$ שלם. הוכיחו כי הוא מקבל ערכים ראשוניים עבור כל $0\le x\le p-2$ שלם.
8. תהא $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ כך שלכל m,n שלמים מתקיים ש- $f(m)-f(n)$ מתחלק ב- $f(m-n)$. הוכיחו כי לכל m,n שלמים המקיימים $f(m)\le f(n)$, מתקיים שהמספר $f(n)$ מתחלק ב- $f(m)$.
9. מצאו את כל הזוגות (m,n) של שלמים המקיימים $m^2+2\cdot 3^n=m(2^{n+1}-1)$.
10. הוכיחו כי יש אינסוף טבעיים n עבורם למספר n^2+1 יש מחלק ראשוני העולה על $2n+\sqrt{2n}$.
11. מצאו את כל המספרים הטבעיים n שיש להם כפולה שלמה שברישום העשרוני שלה מופיעות ספרות זוגיות ואי-זוגיות לסירוגין.
12. נתון המספר 889 ... 7788 ... 6677 ... 3366 ... 2233 ... 1122 ... 11 (הספרות 1,2,3,6,7 מופיעות N פעמים כל אחת, והספרה 8 מופיעה $N-1$ פעמים). האם ייתכן שמספר זה הוא ראשוני?
13. הוכיחו שמספר שלם a הוא שארית ריבועית מודולו כל ראשוני p אם ורק אם a הוא ריבוע שלם.
14. מצאו את כל הזוגות של שלמים $m,n>2$ כך שעבור אינסוף ערכים שלמים חיוביים של k מתקיים ש-
   א. k^m+k-1 מחלק את k^n+k^2-1.
   ב. k^n+k^2-1 מחלק את k^m+k-1.
15. השורות והעמודות של טבלה $2^n\times 2^n$ מוספרו מ- 0 עד 2^n-1. בצורה כזאת כל משבצת מוגדרת ע"י זוג מספרים המציינים את מספר השורה ומספר העמודה, וכל זוג מספרים שלמים מגדירים משבצת כאשר מסתכלים עליהם מודולו 2^n. משבצות הטבלה נצבעו כך שהמשבצות (i,j) ו- $(j,i+j)$ צבועות באותו צבע, לכל i,j שלמים. הוכיחו כי הכמות המקסימלית האפשרית של צבעים היא 2^n.