להטוטנות מספרים

1. תהא $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ונסמן ב-f^m את ההרכבה של f עם עצמה m פעמים. נניח שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $k\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים $f^{2k}(n)=n+k$, ונסמן ב-k_n את ה-k המינימלי שמקיים זאת. הוכיחו כי הסדרה $k_1, k_2, \ldots$ אינה חסומה.

SL 2012, A6

2. יהא r שלם חיובי, ותהא $a_0, a_1, \ldots$ סדרה אינסופית של מספרים ממשיים. נתון שלכל שני שלמים אי-שליליים m, s קיים שלם חיובי n בקטע $m+1\le n\le m+r$ כך שמתקיים

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m+s} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+s}.$$

הוכיחו כי הסדרה מחזורית, כלומר קיים $p\ge 1$ שלם עבורו $a_{n+p}=a_n$ לכל $n\ge 0$ שלם.

SL 2013, C5

3. סדרת המספרים השלמים $a_1, a_2, \ldots$ מקיימת את שני התנאים הבאים:

(i) $1\le a_j\le 2015$ לכל $j\ge 1$;

(ii) $k+a_k\ne l+a_l$ לכל $1\le k<l$.

הוכיחו כי קיימים שני שלמים חיוביים b ו-N כך שמתקיים

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)\right|\le 1007^2$$

לכל זוג מספרים שלמים m ו-n המקיימים $n>m\ge N$.

IMO 2015, Q6 (SL C5)

4. יהא n שלם חיובי, ויהיו $a_1, \ldots, a_n$ מספרים שלמים המקיימים $n \mid a_1+\cdots+a_n$. הוכיחו כי קיימות שתי פרמוטציות $(b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n)$ של $(1, \ldots, n)$ כך שלכל $1\le i\le n$ מתקיים

$$b_i + c_i \equiv a_i \pmod n.$$

SL 2005, C7