מספרי פיבונצ'י.

נגדיר סדרת מספרי פיבונצ'י f_n בצורה הבאה: $f_0=0$, $f_1=1$, $\boxed{f_{n+2}=f_{n+1}+f_n}$.

נגדיר גם סדרת מספרי לוקס l_n : $l_0=2$, $l_1=1$, $\boxed{l_{n+2}=l_{n+1}+l_n}$.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
f_n	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
l_n	-4	3	-1	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	512

1) הוכיחו כי: א) $f_n+f_{n+2}=l_{n+1}$ ב) $\sum_{i=1}^{\infty}\binom{n-i}{i-1}=f_n$, ג) $\boxed{f_{n+1}f_{k+1}+f_nf_k=f_{n+k+1}}$

ד) ${f_{n+1}}^3=3{f_n}^3+6{f_{n-1}}^3-3{f_{n-2}}^3-{f_{n-3}}^3$ ה) ${f_{n+1}}^2=2{f_n}^2+2{f_{n-1}}^2-{f_{n-2}}^2$

ה) $\sum_{i=0}^{n}f_i^2=f_nf_{n+1}$ ו) $\operatorname{arccot}(f_{2n})=\operatorname{arccot}(f_{2n+1})+\operatorname{arccot}(f_{2n+2})$

2) א) נסמן $F(n)=f_n$. מצאו את המחלק המשותף הגדול ביותר של $F(F(F(2015)))$ ו-$F(F(F(2020)))$ (כלומר חשבו את $\gcd\left(F(F(F(2015))),F(F(F(2020)))\right)$)

ב) האם המספרים $F(F(F(n)))$, $F(F(F(n+4)))$ בהכרח זרים (עבור n טבעי)?

3) א) נסמן $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\frac{f_n\cdot f_{n-1}\cdot\ldots\cdot f_{n-k+1}}{f_k\cdot f_{k-1}\cdot\ldots\cdot f_1}$. הוכיחו כי זהו מספר שלם. רמז: הראו כי $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=f_{n-k-1}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}+f_{k+1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}$.

ב) הוכיחו את הנוסחה הבאה: $0={f_{n-k}}^{p-1}\sum_{k=0}^{p}\begin{bmatrix}p\\k\end{bmatrix}(-1)^{\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil}$, לכל $p>0$.

4) א) הוכיחו כי כמות הדרכים לרצף קטע באורך $n-1$ ע"י קטעים באורכים 1 ו-2 שווה ל-f_n .
ב) הוכיחו כי כמות הדרכים לרצף מעגל באורך n עם נקודה מסומנת ע"י קטעים באורכים 1 ו-2 שווה ל-l_n.

5) הוכיחו כי $p^{k+1}\mid l_{p^{k+1}}-l_{p^k}$ עבור p ראשוני אי-זוגי.

6) הוכיחו כי $f_{mq} = f_m \cdot \sum_{j=1}^{q} \left(\left(f_{m-1} \right)^{j-1} \cdot f_{m(q-j)+1} \right)$.

7) א) הוכיחו כי $\sum_{i=0} \binom{n-i}{i} = f_{n+1}$

ב) הוכיחו כי $\sum_{j=0} \sum_{i=0} \binom{n-i}{j} \binom{n-j}{i} = f_{2n+2}$

8) הוכיחו כי $f_{pt+m} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} f_{m+i} f_t^{\,i} f_{t-1}^{\,p-i}$

9) נסמן $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

א) הוכיחו כי $\Phi^2 = \Phi + 1,\ \Phi \cdot \varphi = -1$, $\varphi^2 = \varphi + 1$

ב) הוכיחו כי $\boxed{f_n = \frac{\Phi^n - \varphi^n}{\sqrt{5}}}$, $\boxed{l_n = \Phi^n + \varphi^n}$

ג) תשימו לב כי מתקיים $\left(\frac{l_n + \sqrt{5} f_n}{2} \right)^k = \frac{l_{kn} + \sqrt{5} f_{kn}}{2}$, וגם

$$\left(\frac{l_n - \sqrt{5} f_n}{2} \right)^k = \frac{l_{kn} - \sqrt{5} f_{kn}}{2} .$$

ד) הוכיחו כי $\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$.

10) מה יותר גדול: f_{100} או 10^{10} ?

11) הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{2^i} = 2$

12) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א) $f_n^{\,4} = f_{n+2} f_{n+1} f_{n-1} f_{n-2} + 1$ ב) $l_n^{\,4} = l_{n+2} l_{n+1} l_{n-1} l_{n-2} + 25$

13) הוכיחו כי $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2^k}} = 3 + \varphi$.