שאלות

1. נסח/י והוכח/י סימני חלוקה ב-2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 27, 37, 41, 101.

2. המספר $\overline{abcde}$ מתחלק ב-123. הוכח כי גם המספר $\overline{bcdea}$ מתחלק ב-123.

3. מצא מספר טבעי, שאם מעבירים את ספרת האחדות שלו להתחלה, הוא גדל פי 2.

4. מצא מספר טבעי שש-ספרתי, $N=\overline{abcdef}$ שאם מעבירים בו מספר ספרות מהסוף להתחלה (ומקבלים את המספרים $\overline{fabcde},\overline{efabcd},\overline{defabc},\overline{cdefab},\overline{bcdefa}$) אז המספרים שמתקבלים הם $2\cdot N$, $3\cdot N$, $4\cdot N$, $5\cdot N$, $6\cdot N$ אבל לאו דווקא בסדר זה.

5. רושמים את כל המספרים מ- 112 עד 444 ברצף בסדר כלשהו.
האם יתכן שהמספר הארוך שנוצר הוא חזקה של 3? נמק.

6. הוכח/י כי קיימים אינסוף מספרים טבעיים שלא ניתן להציגם בצורה:
א. a^2+b^2 כאשר a, b שלמים.
ב. $a^2+b^2+c^2$ כאשר a, b, c שלמים.
ג. $a^3+b^3+c^3$ כאשר a, b, c שלמים.
ד*. $a^6+b^6+c^6+d^6+e^6+f^6+g^6$ כאשר $a, b, \ldots, g$ שלמים.

7. הצג/י את $\frac{3^{60}-1}{80}$ כסכום של חזקות רביעיות של מספרים שלמים, עם כמות מינימלית של מחוברים.

8. מה עשויה להיות ספרת האחדות של:
א. מספר ראשוני של פרמה? (כלומר מספר ראשוני מסוג 2^k+1)
ב. מספר ראשוני של מרסן? (כלומר מספר ראשוני מסוג 2^k-1)

9. מצא/י את כל הפתרונות השלמים של המשוואה $a^3+3ab^2+7b^3=2011$.

10. הוכח/י כי לכל ראשוני p קיים n עבורו $6^n+3^n+2^n-1$ מתחלק ב-p.

תכונות של שאריות שכדאי לזכור

תכונות שקשורות לחזקות:

א. $n^2 = 0,1 \pmod 4$.

ב. $n^2 = 0,1,4 \pmod 8$ (כי $(2k+1)^2 = 8\frac{k(k+1)}{2} + 1 = 8m+1$).

ג. $n^3 = 0,\pm 1 \pmod 7$ (כי $n^6 = 0,1 \pmod 7$).

ד. $n^3 = 0,\pm 1 \pmod 9$ (כי $(3k \pm 1)^3 = 27k^3 \pm 27k^2 + 9k \pm 1 = 9m \pm 1$).

ה. $n^4 = 0,1 \pmod{16}$ (מתקבל מ-ב').

ו. לכל ראשוני p, המשוואה $x^2 = a \pmod p$ אינה פתירה אמ"ם $a^{\frac{p-1}{2}} = -1 \pmod p$.

מספרים שעבורם סדר של 10 קטן:

סדר של 10	מספרים
1	9 ,3
2	11
3	37 ,27
4	101
5	271 ,41
6	13 ,7