רציפות דיסקרטית

1. א. 30 נעליים עומדות בשורה (מתוכן 15 שמאליות ו15 ימניות). הוכיחו שיש מתוכן רצף של 10 נעליים שבהן כמות הנעליים הימניות והנעליים השמאליות שווה.
ב. 30 נעליים אחרות מסודרות במעגל, ויש מתוכן מספר זוגי של נעליים שמאליות. הראו שאפשר לחלק את המעגל לשני חצאי מעגלים, כך שבשניהם יש את אותו מספר של נעליים שמאליות.

2. הוכיחו שקיים n טבעי, עבורו מבין המספרים $\{n, n+1, \ldots, n+999\}$ יש בדיוק 5 מספרים ראשוניים.

3. בקבוצה 200 מספרים ממשיים בין 0 ל-1, שסכומם 101. הוכיחו כי קיימת תת-קבוצה בגודל 100, שסכום המספרים בה הוא בין 50 ל-51.

4. בשורה יש 100 כדורים שחורים ו-100 לבנים, כך שהכדור הכי שמאלי והכי ימני באותו צבע. הוכיחו שאפשר לבחור רצף של כמה כדורים שמתחיל בכדור הכי שמאלי אך לא כולל את כל הכדורים, כך שיש בו אותה כמות של כדורים שחורים ולבנים.

5. חצי מהמשבצות של לוח 100×100 צבועות בשחור, וחצי בלבן. הוכיחו כי אפשר לחלק את הלוח לשני מצולעים זהים (המורכבים ממשבצות שלמות) כך שבכל אחד מהם תהיה כמות זהה של משבצות שחורות ולבנות.

6. בחלק מהמשבצות של ריבוע 50×50 כתובים המספרים 1 ו -1, והערך המוחלט של סכום המספרים במשבצות לא עולה על 100. הוכיחו שיש בתוכו ריבוע 25×25 שהערך המוחלט של סכום המספרים שכתובים בו לא עולה על 25.

7. הקודקודים של מצולע (חסום במעגל) בעל 50 צלעות מחלקים את המעגל ל-50 קשתות, שאורכן 1, 2, 3,..., 50. כל זוג של קשתות נגדיות שונות באורכן ב-25 בדיוק. הוכיחו שיש למצולע שתי צלעות מקבילות.

8. בסדרה אינסופית של מספרים טבעיים כל מספר מתקבל מהמספר הקודם על ידי חיבור של אחת הספרות (הלא אפסיות) שלו אליו. הוכיחו שבסדרה יש מספר זוגי.

9*. נתונות 2001 אבנים, שמשקלן הכולל הוא 1001 גרם. אף אבן לא שוקלת יותר מ-$x+1$ גרם. מצאו את הערך המרבי של x עבורו בהכרח ניתן לחלק את האבנים ל-2 קבוצות שמשקלן הכולל שונה בלא יותר מ-1 גרם.

10*. נתון מספר טבעי. מותר לרשום בין ספרותיו סימני "+" במיקומים כלשהם, ולחשב את הסכום (לדוגמא, המספר 123456789 ניתן לקבל את המספר 789+6+12345=13140). על המספר שהתקבל ניתן לבצע שוב את אותה פעולה. הוכיחו שמכל מספר טבעי ניתן לקבל מספר חד-ספרתי לאחר 10 פעולות כאלו לכל היותר.

בהצלחה!

טחנות רוח

הערה: בתרגיל זה, אם לא מצוין אחרת, כל הנקודות במצב כללי – אף שלוש לא על ישר אחד.

1. על המישור סימנו n נקודות כחולות ו-n נקודות אדומות. הוכיחו שאפשר להעביר ישר שבכל צד שלו תהיה אותה כמות (גדולה מ-0) של נקודות כחולות ואדומות.

2. מצולע בעל 101 צלעות חסום במעגל. מכל אחד מקודקודי המצולע מורידים אנך אל הישר שמכיל את הצלע הנגדית. הוכיחו כי אחד מהאנכים האלה חותך את הצלע עצמה (ולא את המשך הצלע).

3*. תהא S קבוצה סופית של נקודות במישור, בעלת שתי נקודות לפחות. **טחנת רוח** היא תהליך שמתחיל עם ישר ℓ שעובר דרך נקודה יחידה P מהקבוצה S. הישר מסתובב עם כיוון השעון מסביב לנקודה P, שתקרא ה**מיסב**, עד לרגע הראשון בו הישר מכיל נקודה נוספת של S. נקודה זו, שתקרא Q, הופכת להיות המיסב החדש, והישר ממשיך להסתובב עם כיוון השעון מסביב ל-Q, עד לרגע הבא בו הישר יכיל שתי נקודות של S. התהליך ימשך כך לנצח.
הוכיחו כי ניתן לבחור נקודה P מ-S וישר ℓ דרך P, כך שטחנת הרוח שתתקבל תשתמש בכל נקודה מ-S כמיסב אינסוף פעמים.

4. (בורסוק-אולם) נתונות $2m$ נקודות לבנות ו-$2n$ נקודות שחורות. הוכיחו שניתן להעביר ישר, כך שבכל צד שלו יש m נקודות לבנות ו-n נקודות שחורות.

5. נתונות 2014 נקודות אדומות ו-2013 נקודות כחולות. הוכיחו שניתן לחלק אותן לשני חלקים על ידי ישר, שבצד אחד שלו יהיו 2014 נקודות, ומתוכן מספר הנקודות האדומות והכחולות יהיה שונה.

6. נתונות m נקודות לבנות, n נקודות שחורות וישר ℓ, שבצד אחד שלו נמצאות כל הנקודות הלבנות ובצדו השני כל השחורות. נתון מספר $m,n>k$. הוכיחו כי ניתן להעביר ישר שבצד אחד שלו יהיו בדיוק k נקודות מכל צבע.

7. קונפיגורציה של 4027 נקודות נקראת **קולומביאנית** אם היא מורכבת מ-2013 נקודות אדומות ו-2014 נקודות כחולות (במצב כללי). מעבירים מספר ישרים, אשר מחלקים את המישור למספר אזורים. אוסף של ישרים נקרא **טוב** עבור קונפיגורציה קולומביאנית מסוימת אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

- אף ישר אינו עובר דרך אף נקודה בקונפיגורציה;
- אף אזור אינו מכיל נקודות משני הצבעים.

מצא את הערך הקטן ביותר של k עבורו לכל קונפיגורציה קולומביאנית של 4027 נקודות, קיים אוסף טוב של k ישרים.