מקדמים בינומיים

יש 3 גישות:

I. אינדוקטיבית \ משולש פסקל. נוסחה $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

כמות הדרכים הקצרות ביותר על קווי משבצות מ-$(0,0)$ ל-(k,m), כאשר $k+m=n$.

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
  1   7  21  35  35  21   7   1
```

II. גישה קומבינטורית. כמות הדרכים לבחור תת-קבוצה של k בקבוצה של n. $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

III. גישה אלגברית. $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$.

הגישות שקולות, וזה מצריך הוכחה. כתוצאה מקיום של גישות שונות, להרבה זהויות יש לפעמים 3 הוכחות שונות מהותית.

זהויות מפורסמות:

א. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

ב. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$.

ג. $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots$.

ד. $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots\approx\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\ldots\approx\frac{2^n}{3}$.

ה. $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$.

ו. $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{k+m}{k}=\binom{k+m+1}{k+1}$.

ז. $\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\ldots=f_{n+1}$.

ח. $\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+3\cdot\binom{n}{3}+\ldots+n\cdot\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}$.

ט. $\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\cdot\binom{n}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\cdot\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

י.** זהות של אבל (Abel): $p\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p-kq)^{k-1}(r+kq)^{n-k}=(p+r)^n$,

כאשר n טבעי, p, q, r ממשיים, p שונה מ-0.

שאלה קומבינטורית: כמה פתרונות יש בשלמים חיוביים או בשלמים אי-שליליים למשוואה $a+b+c=100$?
למשוואה $a+b+c+d=100$?

רמז: מחסומים וכדורים.

מספרי קטלן (Catalan)

c_n = כמות שילושים של $n+2$-צולע = כמות הדרכים לסדר n סוגריים שמאליים ו-n סוגריים ימניים
= כמות עצים = כמות עצים בינאריים = כמות יערות = ...
נוסחת נסיגה $c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + ... + c_{n-1}c_n$ עם תנאי התחלה $c_0 = c_1 = 1$.

מקרה פרטי של שאלת הקופאית יש k אנשים אם מטבעות של 5 ₪, ℓ אנשים אם מטבעות של 10 ₪, ולקופאית יש m מטבעות של 5 ₪ עודף. בכמה דרכים ניתן לסדר את האנשים, כך שהתור לא יתקע?

נוסחה מפורשת $c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

מקדמים טרינומיים

מקדם של $a^k b^\ell c^{n-k-\ell}$ בפתיחת סוגריים של $(a+b+c)^n$.
נוסחת נסיגה: $\binom{n}{k,\ell} = \binom{n-1}{k-1,\ell} + \binom{n-1}{k,\ell-1} + \binom{n-1}{k,\ell}$.
משמעות קומבינטורית: לפרק קבוצה נתונה ל-3 קבוצות.
תכונות דומות למקדמים בינומיים, למשל: $\sum_k \sum_\ell \binom{n}{k,\ell} = 3^n$.
נוסחא מפורשת: $\binom{n}{k,\ell} = \frac{n!}{k!\ell!(n-k-\ell)!} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{\ell}$.

באופן דומה יש מקדמים מולטינומיים עבור $k_1 + k_2 + ... + k_j = n$ כמות הדרכים לחלק את n לקבוצות בגדלים $k_1, ..., k_j$ היא $\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdot ... \cdot \binom{k_{j-1}+k_j}{k_j-1} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_j!}$.

כמה חידות בקשר לתורת המספרים

חידה 1. המספרים $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, $\frac{(2n)!}{n! \cdot (n+1)!}$ הם שלמים, ולמה? רמז: כי הם כמויות.

חידה 2*. הוכח\י שכל שני מספרים בשורה של משולש פסקל (לא בקצוות) אינם זרים.
רמז: מקדם טרינומי.
חידה 3. הוכח\י כי בכל שורה של משולש פסקל כמות המספרים האי-זוגיים היא חזקת 2, או אפילו טענה כללית יותר: אם S מספר המספרים בשורה של משולש פסקל, שלא מתחלקים ב-p ראשוני, אז אף גורם ראשוני של S לא עולה על p.

מקדמים בינומיים מודולו p ראשוני

לכל ראשוני p:

א. $\binom{p}{k}$ מתחלק ב-p עבור $k \neq 0, p$.

ב. $\binom{p^m}{k}$ מתחלק ב-p עבור $k \neq 0, p^m$.

ג. $\binom{pn}{k}$ מתחלק ב-p אם k לא מתחלק ב-p.

ד. $\binom{pn}{pk} = \binom{n}{k} \pmod p$.

ה. אם $k+m+n = p-1$, אזי $\binom{m+k}{k} = \pm\binom{n+m}{m} \pmod p$.

משפט לוקאס. אם נרשום את $a = \left(\overline{a_s a_{s-1} ... a_2 a_1 a_0}\right)_p$, $b = \left(\overline{b_s b_{s-1} ... b_2 b_1 b_0}\right)_p$ בבסיס ספירה p, אז $\binom{a}{b} = \binom{\overline{a_s a_{s-1} ... a_2 a_1 a_0}}{\overline{b_s b_{s-1} ... b_2 b_1 b_0}} = \binom{a_s}{b_s} \cdot \binom{a_{s-1}}{b_{s-1}} \cdot ... \cdot \binom{a_2}{b_2} \cdot \binom{a_1}{b_1} \cdot \binom{a_0}{b_0} \pmod p$.

חזקה של p בפירוק לגורמים ראשוניים של מקדמים בינומיים

טענה 1. $\deg_p n! = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^4} \right\rfloor + ... = \frac{n - \sigma_p(n)}{p-1}$.

טענה 2. $\deg_p \binom{m+n}{m} = \frac{\sigma_p(n) + \sigma_p(m) - \sigma_p(m+n)}{p-1}$ וזה גם שווה לכמות המעברים של יחידה לעמודה בחירה יותר שמתרחשים כאשר מחברים $m+n$ בבסיס ספירה.

טענה 3. כל ראשוני בין בתחום $(n, 2n]$ הוא מחלק של $\binom{2n}{n}$.

מסקנה. מכפלת כל הראשוניים בתחום $[1, n]$ קטנה מ-4^n.

משפט צ'בישוב (Чебышёв)**.** לכל n טבעי, יש מספר ראשוני בתחום $(n, 2n]$.

רעיון הוכחה. נניח אחרת. נחלק את כל המחלקים של $\binom{2n}{n}$ ל-3 תחומים:

$[\frac{2}{3}n, n]$, $\left[\sqrt{2n}, \frac{2}{3}n\right]$, $[1, \sqrt{2n}]$ ונעריך תרומה של המספרים בכל תחום. התרומה קטנה מדי, לא מספיקה בשביל להרכיב מספר גדול כמו $\frac{4^n}{2n}$.

שאלות נוספות

1. הוכיחו $\sum_{j=0}^{c}(-1)^j\binom{d}{d-c+j}\binom{d-c+j-1}{j}=1$ לכל $d\geq c\geq 1$ שלמים.

2. הוכח כי לכל $\ell>n>1$ מתקיימת הזהות $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{\ell+j}{n}\binom{n+1}{n-j}=\binom{\ell-1}{n}$.

3. מצאו את כל המספרים השלמים $m\geq 2$ עבורם כל n שלם בתחום $\frac{m}{3}\leq n\leq\frac{m}{2}$ מחלק את המקדם הבינומי $\binom{n}{m-2n}$.

4. $\alpha\beta\sum_{\substack{a+b=s\\a,b\in\mathbb{Z}}}\binom{s}{a}(ka+\alpha)^{a-1}(kb+\beta)^{b-1}=\sigma(ks+\sigma)^{s-1}$ כאשר $\sigma=\alpha+\beta$.

5. הוכיחו כי $\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\cdot\binom{2n-2k}{n-k}=4^n$

6*. הוכיחו את הזהות $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^3=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\cdot\binom{2k}{n}$.

7*. הוכח כי לכל $s>0$ שלם מתקיימת הזהות:

$$4^s\cdot\binom{s+2}{2}=\sum_{\substack{a+b+c+d=s\\a,b,c,d\geq 0}}2^a\binom{b+3}{3}\cdot\binom{2s-1-a}{c}\cdot\binom{5}{d}.$$