חשבון זוויות (ושאר ירקות)

1. יהי ABC משולש כך ש- $\measuredangle B > \measuredangle C$. תהיינה P ו- Q נקודות על הישר AC כך ש- $\measuredangle PBA = \measuredangle QBA = \measuredangle C$ ו- A נמצאת בין P ו- C. נניח שיש נקודה פנימית D לקטע BQ עבורה מתקיים $PD = PB$. נסמן את נקודת החיתוך השנייה של הישר AD עם המעגל החוסם של ABC ב- R. הוכיחו ש- $QB = QR$.

2. המעגל ω חסום במרובע $ABCD$. המשכי הצלעות AB ו- CD נפגשים בנקודה O. המעגל ω_1 משיק לצלע BC בנקודה K ולהמשכי הצלעות AB ו- CD, והמעגל ω_2 משיק לצלע AD בנקודה L ולהמשכי הצלעות AB ו- CD. נתון שהנקודות O, K ו- L נמצאות על ישר אחד. הוכיחו שאמצעי הצלעות BC ו- AD ומרכז המעגל ω נמצאים על ישר אחד.

3. על הצלעות AP ו- PD של משולש חד-זוויות APD בחרו נקודות B ו- C בהתאמה. אלכסוני המרובע $ABCD$ נחתכים בנקודה Q. הנקודות H_1 ו- H_2 הן נקודות מפגש הגבהים של המשולשים APD ו- BPC בהתאמה. נקודת החיתוך השנייה של המעגלים החוסמים של המשולשים ABQ ו- CDQ היא X ונקודת החיתוך השנייה של המעגלים החוסמים של המשולשים BQC ו- AQD היא Y. הוכיחו שאם X נמצאת על H_1H_2 אז גם Y נמצאת עליו.

4. מעגל עם מרכז ב- O עובר דרך הקודקודים A ו- C של המשולש ABC וחותך את צלעותיו AB ו- BC בנקודות K ו- N בהתאמה. המעגלים החוסמים של המשולשים KBN ו- ABC נחתכים בשתי נקודות שונות, B ו- M. הוכח ש- $\measuredangle OMB = 90°$.

5. נתון משולש שווה-שוקיים ABC. המעגל σ משיק לשוקיים השוות AB ו- AC וחותך את הצלע BC בנקודות K ו- L. הקטע AK חותך את σ שנית בנקודה M. הנקודות P ו- Q סימטריות ל- K ביחס לנקודות B ו- C בהתאמה. הוכיחו שהמעגל החוסם של המשולש PMQ משיק ל- σ.

6. נתון ישר l שלא חותך את המעגל ω עם מרכז O. תהי E עקב האנך מ- O ל- l. תהי M נקודה כלשהי על הישר l ששונה מ- E. המשיקים מ- M למעגל ω נפגשים איתו בנקודות A ו- B. תהיינה C ו- D עקבי האנכים מ- E ל- MA ול- MB בהתאמה. הישר CD חותך את OE בנקודה F. הוכיחו ש- F לא תלויה במיקום של M.