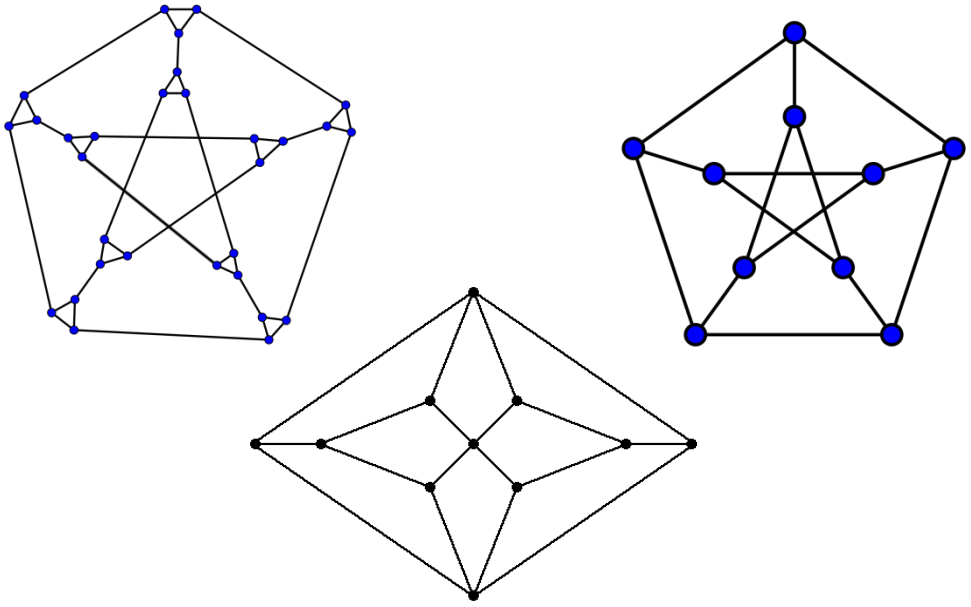
טיולים

מסלול אוילר בגרף זה מסלול, שעובר דרך כל קשת פעם אחת.
מסלול אוילר קיים, אם ורק אם הגרף קשיר ומכיל לא יותר משני קודקודים
בעלי דרגה אי-זוגית. אם יש 0 קודקודים כאלה, קיים מעגל אוילר.
מעגל המילטון בגרף זה מסלול, שעובר דרך כל קודקוד פעם אחת וחוזר לנקודה המקורית.

1. האם אפשר לרשום במעגל ספרות מ-1 עד 9, כך שכל זוג של ספרות שונים יופיע ברצף פעם אחת בדיוק?
האם תשתנה התשובה כאשר מדובר בספרות מ-0 עד 9?

2. נסו למצוא מעגלי המילטון בגרפים שמופיעים בציורים הבאים:



3. א. מצאו מעגל המילטון על קודקודי התריסרון (דודקהדרון) המשוכלל – מותר ללכת לאורך המקצועות. (זאת החידה של המילטון שנתנה את השם לנושא).
ב. הוכיחו, שמעגל המילטון על הקודקודים של פאון משוכלל מחלק את המשטח שלו לשני חלקים שווי-שטח.

4. נסחו תנאי מספיק והכרחי לכך שפאון יהיה 2-צביע בקודקודים.

5. הראו שלקובייה n-ממדית יש מעגל המילטון.

6. האם אפשר לרשום במעגל ספרות 0 ו-1, כך שכל שישייה אפשרית של ספרות תופיע ברצף נגד כיוון השעון פעם אחת בדיוק?

7. הלמה של שפרנר.
א. מציירים במישור משולש גדול, ומחלקים אותו למשולשים קטנים (אסור שיהיו קודקודים על צלעות של משולשים קטנים). את שלושת קודקודי המשולש הגדול צובעים בכחול, אדום וצהוב. כל קודקוד של משולש קטן, צובעים באחד משלושת הצבעים האקראי, בתנאי שאת הקודקודים שעל צלעות המשולש הגדול צובעים רק באחד משני צבעי הקצוות. הוכיחו שקיים משולש קטן אחד לפחות (משולש שאין בתוכו קודקודים או קטעים) ששלושת קודקודיו צבועים בכל שלושת הצבעים.
ב. הכלל עבור ארבעון גדול המחולק לארבעונים קטנים, קודקודיו צבועים בארבעה צבעים, וכל קודקוד אחר צבוע באחד מהם, ואם הוא על פאה או על צלע רק באחד הצבעים של קודקודי הפאה או הצלע.

8. הוכיחו, שאם הדרגה של כל קודקוד היא לפחות מחצית ממספר הקודקודים בגרף, אז יש מעגל המילטון.

9. מצאו מעגל המילטון ארוך ככל האפשר של מלך שח על לוח 8×8, בתנאי שהוא לא חותך את עצמו (מודדים את אורך הקו שמחבר את מרכזי המשבצות בסדר שבו המלך עובר בהן).

10. צריח צולע הוא כלי שחמט, שכל מהלך שלו הוא אופקי או אנכי, אבל תמיד ממשבצת למשבצת סמוכה. מצאו מסלול המילטון של צריח צולע על לוח 8×8 שבו מספר הפניות הוא:
(א) קטן ככל האפשר.
(ב) גדול ככל האפשר.
(ג*) נסו להכליל עבור לוח $2n\times 2n$.

11*. א. מצאו מעגל המילטון ארוך ככל האפשר של מלך שח על לוח 8×8.
ב. נסו להכליל עבור לוח $n\times n$.

בהצלחה!