# טרנספורמציות גיאומטריות ופתרון בעיות קיצון

12 בפברואר 2015

## 1 הזזות, שיקופים וסיבובים

### 1.1 הזזות

כשאנו מנסים לפתור אי שוויונות גיאומטריים, יש ברשותנו כלים רבים - מאי שוויון המשולש, דרך טריגונומטריה ועד מגוון כלים מסובכים יותר.

לפעמים, הפתרונות יפים יותר (וגם פשוטים יותר) אם מנסים להשתמש בכלים הפשוטים ביותר שבאמתחתנו - טרנספורמציות גיאומטריות. אנחנו יכולים לשנות את העולם כך שאי השוויון אותו אנו חפצים להראות יקבל צורה פשוטה ביותר.

נתבונן למשל בבעיה הבאה:

#### 1.1.1 בניית גשר

נניח שלנהר שתי גדות המהוות ישרים מקבילים, הערים $A, B$ נמצאות משני צידי הנהר, ורוצים לבנות גשר $MN$ במאונך לשפת הנהר, כך שהדרך בין שתי הערים $AMNB$ תהיה הקצרה ביותר.

אנו נפתור בעיה זו תוך שימוש באי השוויון הפשוט ביותר - (אי שוויון המשולש) - הקו הקצר ביותר המחבר שתי נקודות הוא קו ישר.

כיצד זה קשור לבעיה שהצגנו? נזיז את הנקודה $B$ במאונך לנהר לנקודה חדשה $B'$ שנמצאת במרחק רוחב הנהר, $MN$, מ $B$. כלומר, $BB' = MN$ ו $BB' \parallel MN$. אזי $BB'MN$ היא מקבילית ולכן גם $MB' = NB$, ונובע ש

$$AM + MN + NB = (AM + MB') + MN \geq AB' + MN$$

ושוויון מתקיים אם ורק אם $M$ נמצאת על הקו הישר המחבר את $A$ ו $B'$.

כעת ניתן לשאול מה קורה אם יש מספר נהרות שמפרידים בין $A$ ו $B$? היכן כדאי לבנות את הגשרים?

### 1.2 שיקוף ביחס לנקודה

אפשר להשתמש בטרנספורמציות גיאומטריות גם כדי להוכיח טענות.

בשביל להבין את השימושיות של שיקוף ביחס לנקודה, נוכיח קודם את הטענות הפשוטות הבאות -

#### 1.2.1 טענה

הרכבה של שני שיקופים ביחס לנקודות שונות היא הזזה.

יותר במדויק, אם משקפים בנקודה $O_1$ ולאחר מכן בנקודה $O_2$, מקבלים הזזה בכיוון מ $O_1$ ל $O_2$ ובאורך $2O_1O_2$.

**הוכחה** תרגיל - קטע אמצעים.

#### 1.2.2 הערה

שימו לב שהכיוון משתנה אם הופכים את סדר השיקופים!

הבה נראה כיצד עובדה זו יכולה להיות שימושית עבורנו. הנה שאלה לדוגמא שבוודאי נתקלתם בה בעבר

#### 1.2.3 תרגיל

(א) הוכיחו כי אמצעי הצלעות של מרובע כלשהו $ABCD$ יוצרים מקבילית.

**הוכחה** ניתן לראות זאת בדרכים רבות, אך עכשיו כשאנו חושבים במושגים של שיקופים, נוכל לקבל את ההוכחה הקלה והיפה הבאה:

נסמן את אמצעי הצלעות $AB, BC, CD, DA$ ב $M, N, P, Q$ בהתאמה. אם נשקף את $A$ בנקודות אלה בזו אחר זו, נגיע שוב ל $A$. אולם שיקוף ב $M$ ואז ב $N$ שקול להזזה בכיוון מ $M$ ל $N$ באורך $2MN$, ושיקוף ב $P$ ואז ב $Q$ שקול להזזה בכיוון מ $P$ ל $Q$ באורך $2PQ$.

הדרך היחידה בה שתי הזזות יכולות להחזיר אותנו למקום היא אם הן מנוגדות בכיוון ושוות אורך, כלומר $MN = PQ$ ומקביל לו. לכן $MNPQ$ מקבילית.

■

להוכחה זו יתרון נוסף - ניתן להכליל אותה. למשל, הנה הכללה טבעית, שבדרכי פתרון אחרות לא פשוט להגיע אליה -

(ב) יהיו $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ אמצעי הצלעות של משושה כלשהו. הוכיחו שקיימים משולש $T_1$ שצלעותיו שוות ומקבילות לקטעים $M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6$, ומשולש $T_2$ שצלעותיו שוות ומקבילות לקטעים $M_2M_3, M_4M_5, M_6M_1$.

**הוכחה** כמו בחלק (א) אנו רואים ששיקופים באמצעי הצלעות לפי הסדר, מחזירים אותנו למקום, כלומר ההזזות ב $2M_1M_2$, $2M_3M_4$ ו $2M_5M_6$ מסתכמות בחזרה למקום. אבל זה נותן לנו משולש שצלעותיו מקבילות ושוות לקטעים אלה. כיווץ פי 2 יתן לנו את המשולש שאנחנו רוצים. באותו אופן נקבל גם את המשולש השני.

■

## 1.3 סיבוב

דוגמא נוספת לשימוש בטרנסופרמציה גיאומטרית, הפעם אחרת, היא הסיבוב. לפני שנראה שימוש לסיבוב, נוכיח תכונה נחמדה שלו.

### 1.3.1 טענה

הרכבה של שני סיבובים, עם מרכזים $O_1$ ו $O_2$, בזוויות $\alpha$ ו $\beta$ בהתאמה (באותו כיוון), היא סיבוב בזוית $\alpha + \beta$ אם $\alpha + \beta \neq 360^\circ$, והזזה אחרת.

יותר במדויק, הסיבוב הוא סביב הנקודה $O$ שהיא חיתוך הישרים $l_1, l_2$ העוברים דרך הנקודות $O_1, O_2$ ומקיימים $\sphericalangle l_1O_1O_2 = \frac{1}{2}\alpha$ ו $\sphericalangle O_1O_2l_2 = \frac{1}{2}\beta$.

אם $\alpha + \beta = 360^\circ$, ישרים אלה מקבילים, וההזזה היא בכיוון המאונך אליהם במרחק כפול מהמרחק ביניהם.

**הוכחה** קודם כל, נשים לב שאם קטע $AB$ עובר ל $A'B'$ על ידי הזזה בזוית $\alpha$, אז הזוית בין שני הישרים היא $\alpha$ (חישוב זוויות במרובע).

להיפך, אם $AB$ ו $A'B'$ קטעים באותו אורך והישרים יוצרים ביניהם זוית $\alpha$, אזי $A'B'$ הוא סיבוב של $AB$ בזוית $\alpha$ סביב מרכז כלשהו -

אכן, נבנה על $AA'$ קשת מעגל הנראית בזוית $\alpha$, ונסמן ב $O$ את החיתוך שלה עם האנך האמצעי ל $AA'$. אזי ברור שסיבוב בזוית $\alpha$ של $A$ יקח אותה ל $A'$.

נוכיח שסיבוב בזווית $\alpha$ סביב $O$ לוקח גם את $B$ ל $B'$, ולכן גם כל הקטע $AB$ מועבר לכל הקטע $A'B'$. זה נובע מחפיפת המשולשים $OAB$ ו $OA'B'$ (את הזווית מקבלים מציקליות של המרובע).

כעת, נשים לב שהרכבה של שני הסיבובים לוקחת קטע $AB$ לקטע $A'B'$ בגודל שווה, כך שהישרים יוצרים זווית של $\alpha + \beta$. במקרה שבו $\alpha + \beta = 360^\circ$, הישרים מקבילים, ואז $A'B'$ מתקבל מ $AB$ על ידי הזזה.

לכן, כבר קיבלנו את הטענה. נמשיך לקבלת הפרטים המדויקים.

נסמן ב $O_1^{'}$ את הנקודה אליה $O_1$ עוברת לאחר הרכבת שני הסיבובים. נסמן ב $O_2^{''}$ את הנקודה שעוברת ל $O_2$ לאחר הרכבת שני הסיבובים.

המרכז $O$ אותו אנחנו מחפשים צריך להיות על האנכים האמצעיים ל $O_2O_2^{''}$ ול $O_1O_1^{'}$, אבל זו בדיוק הנקודה שתיארנו לעיל.

במקרה בו $\alpha+\beta = 360^\circ$, ההזזה נקבעת לפי העובדה שהיא צריכה להעביר את $O_1$ ל $O_1^{'}$, וניתן לראות בקלות שזו ההזזה שתיארנו.■

דוגמא לשימוש בסיבובים ובטענה הנ"ל היא התכונה היפה הבאה של משולשים שווי צלעות.

### 1.3.2 משפט נפוליאון

(א) על הצלעות של משולש $ABC$ בונים משולשים שווי צלעות כלפי חוץ. הוכיחו כי המרכזים $O_1, O_2, O_3$ של המשולשים יוצרים בעצמם משולש שווה צלעות.

האם הטענה נכונה אם במקום לבנות את המשולשים כלפי חוץ, בונים אותם כלפי פנים?

**פתרון** נתבונן בסדרה של שלושה סיבובים, כל אחד ב 120 מעלות, סביב הנקודות $O_1, O_2, O_3$. הסיבוב הראשון לוקח את $A$ ל $B$, השני את $B$ ל $C$ והשלישי את $C$ ל $A$.

מכאן נובע ש $A$ היא נקודת שבת של פעולה זו. אבל, הרכבה של שלושה סיבובים ב 120 מעלות היא הזזה. ולהזזה אין נקודות שבת. לכן היא חייבת להיות הזהות. (לא עושה כלום).

כעת, הרכבת שני הסיבובים הראשונים היא סיבוב ב $240^\circ$ סביב נקודה $O$, כך ש $\sphericalangle OO_1O_2 = \sphericalangle OO_2O_1 = 60^\circ$, לכן $OO_1O_2$ משולש שווה צלעות.

מכיוון שסכום הסיבוב הזה והסיבוב ב $120^\circ$ סביב $O_3$ צריכים לבטל אחד את השני, וזה ייתכן רק אם $O = O_3$. סיימנו. ■

#### 1.3.3 הערה

זוהי אחת ההוכחות הפשוטות והאלגנטיות ביותר שאני מכיר למשפט, למרות שיש לו מספר רב של הוכחות. אתם מוזמנים לחפש.

אותה הוכחה בדיוק עובדת גם אם בונים את המשולשים כלפי פנים!

יתר על כן, הוכחה זו שוב מאפשרת לנו למצוא בלי מאמץ את ההכללה הבאה של משפט נפוליאון:

(ב) על הצלעות של משולש $ABC$ בונים משולשים שווי שוקיים, כלפי חוץ $BCA_1, CAB_1, ABC_1$ עם זוויות ראש $\alpha, \beta, \gamma$ בקדקודים $A_1, B_1, C_1$ בהתאמה.

הוכיחו כי אם $\alpha+\beta+\gamma = 360^\circ$, אזי הזוויות של המשולש $A_1B_1C_1$ שוות ל $\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\beta, \frac{1}{2}\gamma$ בהתאמה. כלומר, הן אינן תלויות במשולש המקורי $ABC$.

האם הטענה נכונה אם בונים את המשולשים כלפי פנים?

**פתרון** ההוכחה דומה מאוד להוכחה של משפט נפוליאון. שוב $A$ נשארת במקום לאחר הרכבת שלושת הסיבובים, ומהתנאי נובע שמדובר בהזזה ולכן הם מבטלים אחד את השני.

הרכבת שני הסיבובים הראשונים יוצרת סיבוב בזווית $\alpha + \beta$ סביב נקודה $C_2$ כך שזוויות המשולש $A_1B_1C_2$ שוות לגדלים הנ"ל. אולם, סיבוב זה צריך לבטל את הסיבוב ב $\gamma$ סביב $C_1$, לכן $C_1 = C_2$ וסיימנו.

כמובן, אותה הוכחה עובדת אם בונים את המשולשים כלפי פנים.■

#### 1.3.4 הערה

בעצם, הבנייה לעיל שקולה לבניית משולשים דומים על הצלעות. התראו כיצד?

הרעיונות ששימשו אותנו כאן נותנים לנו גם אפשרות להרחיב את אופקינו למרובעים.

#### 1.3.5 תרגיל

(א) על צלעותיו של מרובע קמור $ABCD$ בונים משולשים שווי צלעות $ABM_1, BCM_2, CDM_3, DAM_4$, כך שהראשון והשלישי נבנים כלפי חוץ והשני והרביעי נבנים כלפי פנים.

הוכיחו שהמרובע $M_1M_2M_3M_4$ הוא מקבילית. (במקרים מסוימים היא עשויה להתנוון לקטע. התדעו מתי?)

**הוכחה** הרכבת הסיבובים ב $60^\circ$ סביב כל הנקודות מחזירים את $A$ למקום. נשים לב שכיווני הסיבוב סביב $M_2$ ו $M_4$ מנוגדים לכיווני הסיבוב סביב $M_1$ ו $M_3$. לכן, מדובר שוב בהזזה.

יתר על כן, כבר הרכבת הסיבובים סביב $M_1$ ו $M_2$ היא הזזה, והיא צריכה להיות מנוגדת להזזה המהווה את הרכבת הסיבובים סביב $M_3$ ו $M_4$.

ההזזה הראשונה מזיזה את $M_1$ לנקודה $M_1'$ היוצרת משולש שווה צלעות $M_1M_2M_1'$. ההזזה השנייה מזיזה את $M_3$ לנקודה $M_3'$ היוצרת משולש שווה צלעות $M_3M_4M_3'$.

לכן נובע ש $M_1M_1'$ ו $M_3M_3'$ שווים ומקבילים (ובכיוון הפוך). אבל סיבוב שלהם ב $60^\circ$ יתן לנו שגם $M_1M_2$ ו $M_3M_4$ שווים ומקבילים - לכן התוצאה.■

(ב) על צלעותיו של מרובע קמור $ABCD$ בונים ריבועים, כלפי חוץ. מרכזי הריבועים הם $M_1, M_2, M_3, M_4$. הוכיחו ש $M_1M_3 = M_2M_4$ ו $M_1M_3 \perp M_2M_4$.

**הוכחה** יש לנו כאן הרכבה של ארבעה סיבובים ב $90^\circ$. לכן מדובר בהזזה, ומכיוון ש $A$ נשאר במקום, הם מבטלים אחד את השני.

ההרכבה של השניים הראשונים נותנת סיבוב ב $180^\circ$ (שיקוף) סביב נקודה $O$ כך ש $\sphericalangle OM_1M_2 = \sphericalangle OM_2M_1 = 45^\circ$, לכן $OM_1 \perp OM_2$ ו $OM_1 = OM_2$. (נובע גם ש $O$ היא אמצע האלכסון $AC$).

ההרכבה של השניים האחרים נותנת גם היא שיקוף סביב $O$ הפעם כך ש $\sphericalangle OM_3M_4 = \sphericalangle OM_4M_3 = 45^\circ$ , לכן $OM_3 \perp OM_4$ ו $OM_3 = OM_4$. $O$ היא אותה נקודה.

אבל זה אומר שהמשולש $OM_2M_4$ מתקבל מהמשולש $OM_1M_3$ על ידי סיבוב ב $90^\circ$ סביב $O$. לכן $M_1M_3 \perp M_2M_4$ ושווה לו בגודל. ■

(ג) על הצלעות של מקבילית $ABCD$ בונים ריבועים כלפי חוץ. הוכיחו כי המרכזים $M_1, M_2, M_3, M_4$ יוצרים ריבוע. האם זה נכון אם בונים אותם כלפי פנים?

**הוכחה** הוכחנו כבר שהאלכסונים שווים ומאונכים. יתר על כן, הנקודה $O$ לעיל היתה אמצע $AC$. מכיוון ש $ABCD$ מקבילית, זוהי נקודת חיתוך האלכסונים (למעשה, מרכז הסימטריה) שלה ולכן מרכז הסימטריה גם של $M_1M_2M_3M_4$. מכיוון שלמרובע יש מרכז סימטריה רק אם הוא מקבילית, כבר קיבלנו ש $M_1M_2M_3M_4$ מקבילית. (אפשר לראות זאת גם מכך ש $O$ היא אמצע $BD$ ולכן הטיעונים של סעיף (ב) יתנו לנו שהאלכסונים נחצים).

אבל מקבילית עם אלכסונים מאונכים היא מעוין, והעובדה שהאלכסונים שווים הופכת אותה לריבוע.■

כמובן, אותה הוכחה בדיוק עובדת כאשר בונים אותם כלפי פנים.

הרעיון של הסיבוב הוא כל כך יסודי, אבל באופן מפתיע הביא לתוצאות חדשות בגיאומטריה של המישור אפילו במאה ה־20 (!!)

#### 1.3.6 משפט פומפיו (1936)

יהי $ABC$ משולש שווה צלעות, ותהי $P$ נקודה במישור שאינה על המעגל החוסם של $ABC$. אזי ניתן לבנות משולש שצלעותיו באורכי הקטעים $PA, PB, PC$.

אם $P$ נמצאת על המעגל החוסם, אז אחד משלושת האורכים שווה לסכום השניים האחרים.

**הוכחה** כדי להבין מדוע זה קורה, נסובב את המשולש בזווית של $60^\circ$ סביב הנקודה $C$, ונסמן ב $A', P'$ את תמונות הנקודות $A, P$ בהתאמה. (שימו לב ש $A$ היא תמונת $B$).

כעת המשולש $PP'A$ הוא משולש שצלעותיו באורכי $P'A = PB$, $PP' = PC$ ו $PA$, כנדרש.

מתי זה אינו משולש? כלומר, מתי הנקודות $P, P', A$ נמצאות על קו ישר אחד?

אז $P$ לא יכולה להיות בתוך המשולש. מכיוון ש $A$ היא על $PP'$ ו $PP'C$ שווה צלעות, $\angle APC = 120^\circ$ אם $P$ בין $A$ ל $P'$, או $60^\circ$ אחרת, כלומר $P$ על המעגל החוסם.■

נוכל גם להשתמש בסיבוב וברעיונות עליהם דיברנו בתחילת ההרצאה על מנת לפתור בעיות קיצון. למשל:

#### 1.3.7 בעיה (נקודת פרמה)

יהי $ABC$ משולש. מצאו נקודה $P$ במישור המשולש כך ש $PA + PB + PC$ מינימלי.

**הוכחה** נסובב את המשולש סביב $C$ ב $60^\circ$. נסמן ב $P', A'$ את תמונות $P, A$ כמקודם. אזי $PP' = PC$ ו $P'A' = PA$. לכן $PA + PB + PC = BP + PP' + P'A' \geq BA'$.

מתי יש שוויון? כאשר זהו קו ישר, כלומר הנקודות $B, P, P', A'$ נמצאות על אותו קו ישר. לכן $\angle BPC = \angle A'P'C = 120^\circ$.

אבל זה אומר ש $P$ היא נקודה כך ש $\angle BPC = \angle CPA = \angle APB = 120^\circ$. נקודה זו נקראת נקודת פרמה. ■

#### 1.3.8 הערה

נוכל לשלב את שתי האבחנות האחרונות ולראות כי אם $M$ היא נקודת פרמה במשולש $X, Y, Z$ שאורכי צלעותיו $PA, PB, PC$, אז $MX + MY + MZ = AB$.

#### 1.3.9 מסקנה

ניזכר במשפט נפוליאון. אנחנו מקבלים שאם בונים משולשים שווי צלעות על הצלעות של משולש $ABC$, אז $P$ נמצאת על החיתוך של $AA_1, BB_1$ ו $CC_1$.

יתר על כן, $AA' = BB' = CC'$, כיוון שהאורך של כל אחד מהם הוא $PA + PB + PC$.

## 2 סימטריה - שיקוף בישר

### 2.1 הקדמה

על מנת להבין את חשיבותה של פעולת השיקוף בישר, נתחיל מפתרון הבעיה הפשוטה והידועה הבאה

### 2.1.1 זווית הפגיעה שווה לזווית ההחזרה

(א) נתון קו ישר $MN$ ונתונות שתי נקודות $A, B$ באותו צד שלו. מצא נקודה $X$ על הקטע $MN$ כך ש $\sphericalangle AXM = \sphericalangle BXN$.

**פתרון** נשקף את הנקודה $B$ בישר $MN$ לקבלת נקודה $B'$. כעת נעביר את הקו הישר $AB'$ ונסמן ב $X$ את נקודת החיתוך שלו עם $MN$. קל לראות שזו הנקודה הרצויה.

ניתן גם לפתור כך בעיות מעט יותר סבוכות

(ב) נתון קו ישר $MN$, ושני מעגלים $S_1, S_2$ באותו צד שלו. מצא נקודה $X$ על $MN$ כך שאחד המשיקים מנקודה זו למעגל $S_1$ ואחד המשיקים מנקודה זו למעגל $S_2$ יוצרים זוויות שוות עם הישר $MN$.

**פתרון** הפתרון כמעט זהה. נשקף את המעגל $S_2$ בישר $MN$ ונעביר משיק משותף לשני המעגלים. למעשה, יש לנו 4 אפשרויות לבחירת המשיק המשותף, וכל אפשרות תתאים לבחירה של שני משיקים מהנקודה למעגלים - כך נקבל את 4 הנקודות הרלבנטיות. הנקודה $X$ היא נקודת החיתוך של המשיק המשותף עם $MN$. ■

(ג) נתון קו ישר $MN$ ונתונות שתי נקודות $A, B$ באותו צד שלו. מצא נקודה $X$ על הקטע $MN$ כך ש $\sphericalangle AXM = 2\sphericalangle BXN$.

**פתרון ראשון** נניח שמצאנו את הנקודה $X$. תהי $B'$ השיקוף של $B$ ב $MN$ ונעביר את הישר $AX$. נסמן ב $C$ נקודה על המשכו. אז $\sphericalangle CXN = 2\sphericalangle B'XN$.

לכן $B'X$ חוצה את זווית $\sphericalangle CXN$. נתבונן במעגל שמרכזו $B'$ ומשיק ל $MN$. נובע שהוא משיק גם ל $AXC$. לכן הנקודה $X$ היא החיתוך של הישר $MN$ עם המשיק מ $A$ למעגל זה. (איזה מהמשיקים?)■

**פתרון שני** שוב, נניח שמצאנו את $X$. נסמן ב $A'$ את שיקוף $A$ ב $B'X$. מכיוון ש $B'X$ חוצה את זווית $\sphericalangle AXM$, $A'$ נמצאת על $XM$ ו $B'A = B'A'$. לכן, אם נעביר מעגל שמרכזו ב $B'$ ורדיוסו $B'A$, חיתוכו עם $MN$ יהיה הנקודה $A'$.

כעת נעביר אנך אמצעי לקטע $AA'$ (בעצם זהו גובה מ $B$) וחיתוכו עם $MN$ הוא הנקודה המבוקשת $X$. ■

אפשר להשתמש בשיקוף בישרים לא רק לבנייה אלא גם להוכחת תכונות מעניינות במשולשים, כמו למשל בדוגמא הבאה:

### 2.1.2 נקודות מפגש הגבהים (אורתוצנטר)

יהיו $A_1, A_2, A_3, A_4$ נקודות במישור, כך ש $A_4$ היא נקודת מפגש הגבהים של המשולש $A_1A_2A_3$. נסמן את המעגלים החוסמים של המשולשים $A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, A_1A_3A_4, A_2A_3A_4$ ב $S_4, S_3, S_2, S_1$ בהתאמה.

נסמן ב $O_4, O_3, O_2, O_1$ את המרכזים של המעגלים האלה, בהתאמה.

(א) הוכיחו ש $A_1$ היא נקודת מפגש הגבהים של $A_2A_3A_4$, $A_2$ היא נקודת מפגש הגבהים של $A_1A_3A_4$, $A_3$ היא נקודת מפגש הגבהים של $A_1A_2A_4$. (מיידי).

(ב) המעגלים $S_1, S_2, S_3, S_4$ כולם חופפים.

**הוכחה** נשקף את הנקודה $A_4$ בישר $A_2A_3$ לקבלת הנקודה $A_4'$. נקודה זו נמצאת על המעגל $S_4$. (חישוב זוויות פשוט). לכן $S_4$ הוא המעגל החוסם של $A_2A_3A_4'$.

אולם זה אומר שהוא מתקבל מהמעגל החוסם של $A_2A_3A_4$, $S_1$, על ידי שיקוף בישר $A_2A_3$, בפרט הוא חופף לו. מסימטריה, זה נכון גם למעגלים האחרים. ■

(ג) המרובע $O_1O_2O_3O_4$ מתקבל מהמרובע $A_1A_2A_3A_4$ על ידי שיקוף ביחס לנקודה כלשהי $O$. (במילים אחרות, ארבעת הקטעים שמחברים כל נקודה למרכז המעגל החוסם של האחרות, נחתכים בנקודה אחת שחוצה כל אחד מהקטעים).

**הוכחה** לפחות אחד מהמשולשים $A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, A_1A_3A_4, A_2A_3A_4$ חייב להיות חד-זוויות. אכן, אם אחד מהם קהה זווית, נניח $A_2A_3A_4$ בעל זווית קהה ב $A_4$, אז $A_1A_2A_3$ יהיה חד-זוויות. לכן נוכל להניח ש $A_1A_2A_3$ חד זוויות, וכי $A_4$ נמצאת בתוכו. נתבונן במרובע $A_1A_4O_1O_4$. הנקודות $O_1, O_4$ הן המרכזים של המעגלים $S_1, S_4$ שמתקבלים משיקוף האחד של השני בישר $A_2A_3$, כפי שראינו קודם.

לכן $O_1$ מתקבלת משיקוף של $O_4$ ב $A_2A_3$, כלומר $O_1O_4 \perp A_2A_3$. לכן $O_1O_4 \parallel A_1A_4$. כמו כן, $O_1A_4 = O_4A_1$ הוא אורך הרדיוס (הזהה) בשני המעגלים.

מכאן נובע שהמרובע הוא מקבילית או טרפז שווה שוקיים. אולם האנך האמצעי של $O_1O_4$, $A_2A_3$ אינו חותך את $A_1A_4$, לכן זו חייבת להיות מקבילית, ואז אלכסוניה חוצים זה את זה בנקודה $O$. באותו אופן רואים ש $O$ חוצה את $A_2O_2$ ו $A_3O_3$.■

## 2.2 בעיית Fagnano

כעת נוכל להשתמש בכל מה שלמדנו על מנת לפתור את הבעיה המפורסמת הבאה, הנקראת גם בעיית Fagnano, על שם האיטלקי שחשב עליה בשנת 1775.

### 2.2.1 בעיה

עבור משולש חד זויות, קבעו מהו המשולש החסום בתוכו בעל היקף מינימלי.

אמנם בעצמו פתר את הבעיה, תוך שימוש בכלים של חשבון דיפרנציאלי ובתוצאה של אביו, מאוחר יותר ניתנו מספר הוכחות גיאומטריות, ביניהן ההוכחות של Schwarz ו Fejer, אותן נציג כאן.

### 2.2.2 ההוכחה של שוורץ

ההוכחה של שוורץ משתמשת בטרנספורמציה מעט שונה - אנו נשקף הפעם במקום בנקודה, בקו ישר.

בהינתן משולש $ABC$, נשקף את כל המשולש בצלע $BC$. נסמן את תמונת $A$ לאחר השיקוף ב $A'$.

כעת, נשקף את המשולש שהתקבל בצלע $CA'$. נסמן את תמונת $B$ ב $B'$. נמשיך ונשקף ב $A'B'$ לקבלת $C'$, ב $B'C'$ לקבלת $A''$, ב $C'A''$ לקבלת $B''$ וב $A''B''$ לקבלת $C''$.

בסך הכל שיקפנו את המשולש שש פעמים.

תחילה, נשים לב שהמשולש האחרון, $A''B''C''$ הוא בעצם הזזה של המשולש המקורי.

אכן, שני השיקופים הראשונים מעבירים את $ABC$ ל $A'B'C$ - משולש שיכול להתקבל גם על ידי סיבוב ב $2\sphericalangle C$ סביב $C$ מהמשולש המקורי.

באופן דומה, הרכבת שני השיקופים הבאים היא בעצם סיבוב ב $2\sphericalangle B$ סביב $B'$, והרכבת שני השיקופים האחרונים היא סיבוב ב $2\sphericalangle A$ סביב $A''$. מכיוון ש $2\sphericalangle A + 2\sphericalangle B + 2\sphericalangle C = 360^\circ$, ממה שכבר הוכחנו, נובע שמדובר בהזזה.

לכן $BC$ מקבילה ל $B''C''$.

כעת, נניח ש $UVW$ הוא משולש החסום בתוך המשולש $ABC$, כאשר $U$ על $BC$, $V$ על $CA$ ו $W$ של $AB$. נסמן ב $V'$ את תמונת $V$ אחרי השיקוף הראשון.

נסמן ב $W'$ את תמונת $W$ לאחר השיקוף השני, נסמן ב $U'$ את תמונת $U$ לאחר השיקוף השלישי, ובאופן דומה את הנקודות $V''$, $W''$, $U''$.

אזי אורך הקו השבור $UV'W'U'V''W''U''$ הוא פעמיים ההיקף של המשולש $UVW$. אורכו בוודאי ארוך מהקו הישר המחבר את $U$ ו $U''$. מתי קו זה הוא קו ישר?

אנו צריכים שיתקיים

$$\sphericalangle UVC = \sphericalangle WVA, \quad \sphericalangle WUB = \sphericalangle VUC, \quad \sphericalangle AWV = \sphericalangle UWB$$

נוכיח שזה מתקיים כאשר $U, V, W$ הם עקבי הגבהים. (מרובעים ציקליים - פשוט).

לכן, אם נסמן ב $E, F, G$ את עקבי הגבהים, נקבל שאורך הקו הישר $EE''$ הוא פעמיים ההיקף של $EFG$. אבל $BC \parallel B''C''$, לכן $UE \parallel U''E''$ ושווה לו באורך, כלומר $UU''E''E$ היא מקבילית ולכן $UU'' = EE''$, ונובע שההיקף של $EFG$ מינימלי.

### 2.2.3 ההוכחה של Fejer

בהינתן $U, V, W$ על $BC, CA, AB$ בהתאמה, נשקף את $U$ ב $AC$ לקבלת $U'$ ונשקף אותה גם ב $AB$ לקבלת $U''$. כעת ההיקף הוא פשוט אורך הקו השבור $U'VWU''$.

אם נניח ש $U$ נשארת באותו מקום, ואנו משנים את המיקום של $V$ ו $W$, אז $U$ ו $U''$ נשארות קבועות. מכיוון שהקו הקצר ביותר שמחבר את שתיהן הוא קו ישר, $V$ ו $W$ שיתנו אורך מינימלי עבור $U$ מסוימת יהיו נקודות החיתוך של $U'U''$ עם הצלעות. כעת, ננסה לבחור את $U$ כך שההיקף, כלומר אורך $U'U''$ יהיה מינימלי. נשים לב ש $\sphericalangle U'AU'' = 2\sphericalangle A$ לכל מיקום של $U$. לכן כל המשולשים דומים, והאורך של $U'U''$ מינימלי כאשר האורך $AU' = AU$ הוא מינימלי.

אבל אורך $AU$ מינימלי כאשר $AU$ הוא הגובה (הקו הקצר ביותר בין נקודה לישר הוא האנך מהנקודה לישר). לכן $U$ היא עקב הגובה מ $A$ ל $BC$.

כעת, נוכל לנסות לקבוע את מיקום $V, W$, אבל נוכל גם להשתמש בסימטריה. מהשיקולים לעיל אפשר לראות שיש פתרון יחיד לבעיה.

אם נתחיל מכל אחת מהצלעות האחרות, נקבל את אותו פתרון יחיד. לכן נקבל שגם $V, W$ הם עקבי הגבהים. כמסקנה, נקבל גם שאם $UVW$ משולש עקבי הגבהים, אז הקו $U'VWU''$ הוא ישר, כלומר את שוויון הזוויות בו השתמשנו בהוכחה הקודמת.