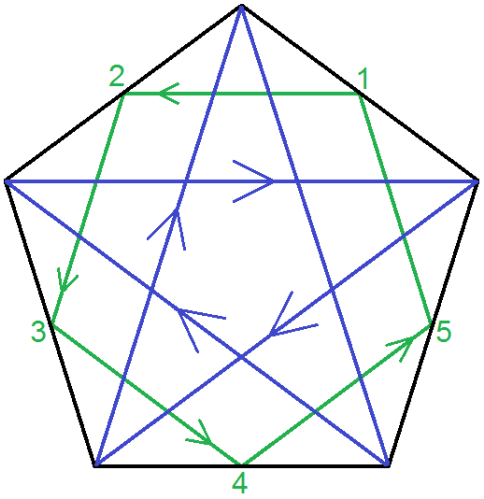
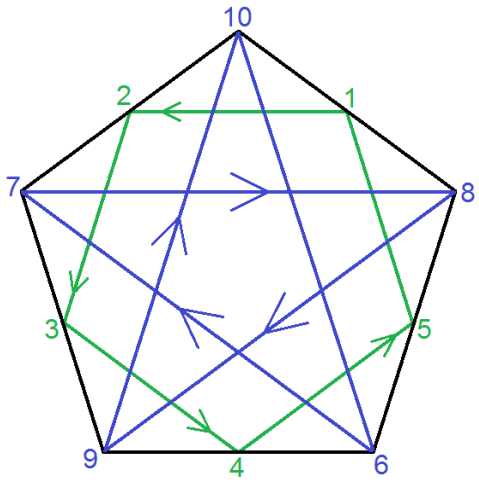
תרגיל 9

1. האם ניתן להציב מספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 באמצעי הצלעות ובקודקודים של מחומש משוכלל (כאשר משתמשים בכל מספר פעם אחד בדיוק), כך שכל סכומי שלשות המספרים על הצלעות יהיו שווים?





פתרון. מספיק לדרוש שכל שתי צלעות סמוכות נותנות אותו סכום. שזה אומר שליש כל קודקוד, הפרש בין שני אמצעי קודקודים שסמוכים אליו שווה להפרש של שני הקודקודים שסמוכים אליו אבל עם סימן הפוך. כלומר בציור שלנו הפרש בין קצוות של אלכסון כלשהו שווה להפרש בין קצוות של צלע ירוק שמקביל לו, אבל עם סימן הפוך.

נניח שעל אמצעי הצלעות של המחומש רשומים המספרים 1, 2, 3, 4, 5 נגיד נגד כיוון השעון (חצים ירוקים). לכן ההפרשים בחצים הכחולים גם צריכים להיות 1, בכיוון שציירנו. כלומר צריך להתחיל מפינה שמאלית תחתונה, וכל פעם שהולכים באלכסון עם כיוון השעון צריכים לעלות ב-1 (וכמובן שאם ממשיכים עוד צעד אז צריכים לרדת ב-4, אבל זה כבר יקרה אוטומטית.

לכן צריכים לרשום מספרים 6, 7, 8, 9, 10 בסדר שמתאים לחצים כחולים.

בציור שנוצר סכום בכל צלע זה 19.

2. עבור אילו n טבעיים ניתן לחלק את המספרים $\{n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5\}$ לשתי מחלקות, כך שמכפלת המספרים בשתי המחלקות שווה?

פתרון. בקבוצה יש מספר אחד לפחות שמתחלק ב-5. לכן יש לפחות שני מספרים כאלה (אחד בכל מחלקה). לכן n מתחלק ב-5.

בקבוצה יכול להיות לכל היותר מספר אחד שמתחלק ב-7. אבל לא יתכן שיש שניים כאלה, לכן אין אפילו מספר אחד בקבוצה שמתחלק ב-7. לכן $n-1$ מתחלק ב-7.

האפשרויות $n=5,10$ לא עונים על הדרישה האחרונה, לכן n הוא לפחות 15 (אם הוא קיים בכלל).

נוכיח, שאם החלוקה קיימת, אז בכל מחלקה 3 מספרים בדיוק. אנחנו טוענים שאפילו מכפלה של 2 מספרים הכי גדולים לא תיתן מספר גדול כמו המכפלה של 4 מספרים, אפילו הכי קטנים, כלומר שמתקיים אי-שוויון:

$$(n+4)(n+5)<n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\left(\frac{n+4}{n+2}\right)\left(\frac{n+5}{n+3}\right)<n(n+1)$$
$$\left(1+\frac{2}{n+2}\right)\left(1+\frac{2}{n+3}\right)<n(n+1)$$

אבל אם $n\geq 15$ אז

$$\left(1+\frac{2}{n+2}\right)\left(1+\frac{2}{n+3}\right)\leq\left(1+\frac{2}{16}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{16}\right)\leq 2\cdot 2<4<n(n+1).$$

ובכן בכל מחלקה 3 מספרים, n ו-$n+5$ במחלקות שונות, הרי רק שניהם מתחלקים ב-5 ובכל מחלקה חייבים מספר שמתחלק ב-5.

נניח כי $n+5$ במחלקה A ו-n במחלקה B, ואמרנו כבר שבכל מחלקה 3 מספרים בדיוק. לכן המספר הכי גדול ב-A גדול מהמספר הכי גדול ב-B, והמספר הכי קטן ב-A גדול מהמספר הכי קטן ב-B, לכן המספר האמצעי ב-A קטן מהמספר האמצעי ב-B (אחרת ב-A תצא מכפלה גדולה יותר).לכן המספר האמצעי ב-A קטן מ-$n+3$, כלומר הוא $n+2$ הוא גם $n+2$ לפחות, כי יש עוד מספר יותר קטן ממנו ב-A ומספר n שהוא בכלל ב-B. לכן המספר האמצעי ב-A הוא $n+2$ והכי קטן הוא $n+1$. ובכן

$$n(n+3)(n+4)=(n+1)(n+2)(n+5)$$
$$n^3+7n^2+12n=n^3+8n^2+17n+10$$
$$0=n^2+5n+10$$

וזה לא נכון: אגף ימין בבירור חיובי. כלומר n כזה לא קיים.

3. בהינתן ראשוני p, מצאו את כל המספרים k עבורם ניתן לחלק את המספרים מ-1 עד k ל-p קבוצות, כך שלכל קבוצה סכום מספרים שווה.

פתרון. סכום המספרים מ-1 עד k הוא $\frac{k(k+1)}{2}$, וזה חייב להתחלק ב-p, לכן k או $k+1$ מתחלק ב-p. כמובן שעבור $k=p$ או $k=p-1$ לא ניתן להשלים את המשימה, הרי אם בכל קבוצה סכום שומה מ-0 אז בכל מספר חייבים לשים מספר אחד וכל המספרים האלה שונים.

קל לראות שעבור $k=2p$ או $k=2p-1$ אפשר לחלק את המספרים לקבוצים עם סכומים שווים. עבור $k=2p$ ניתך לחלק את הכול לזוגות $m,2p+1-m$ ויוצא אותו סכום בכל הזוגות. עבור $k=2p-1$ נחסיר 1 מכל המספרים ואז יווצר גם 0 שאפשר לדלג עליו.

מאותה סיבה אם פתרנו שאלה עבור k אז ניתן לפתור גם עבור $k+2p$, הרי את כל המספרים מ-$k+1$ עד $k+2p$ ניתן לחלק לזוגות $\left(k+m\ ,\ k+2p+1-m\right)$, ואז לכל קבוצה שיצרנו עבור k נוסיף זוג כזה.

נפתור את השאלה עבור $k=3p$.

נרשום את כל המספרים מ-1 עד $3p$ בשלוש שורות. בשורה ראשונה נרשום את כל המספרים מ-1 עד p בסדר עולה. בשורה שנייה נרשום את כל המספרים מ-$p+1$ עד

$2p$: נתחיל מ-$p+\frac{p-1}{2}$, וכל פעם נגדיל ב-1, עד שנגיע ל-$2p$, ואז נעבור ל-$p+1$ ואחרי זה כל פעם נגדיל ב-1.
בשורה שלישית מתחילים ב-$3p$, ומקטינים כל פעם ב-2 עד שמגיעים ל-$2p+1$, אחרי זה עוברים $3p-1$, ואז שוב מקטינים ב-2 כל פעם. הנה דוגמה עבור $p=11$ להמחשה:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
17	18	19	20	21	22	12	13	14	15	16
33	31	29	27	25	23	32	30	28	26	24

רואים שבכל עמודה סכום זהה, הרי כל פעם שעוברים מעמודה לעמודה הבאה שני מספרים גדלים ב-1 ומספר אחרון עולה ב-2, ורק באמצע שורה מספר ראשון עולה ב-1, השני יורד ב-$p-1$, והאחרון עולה ב-$p-2$, ולכן גם אז הסום בעמודה נשמר.
ניתן להחסיר 1 מכל המספרים, ולמחוק 0 שיוצר, אבל עדיין סכום בכל עמודה יהיה אותו דבר. ובכן, קיים פתרון כאשר k או $k+1$ מתחלק ב-p, אבל $k>p$.

4. א. הוכיחו כי מבין כל 16 טבעיים רצופים, תמיד ניתן למצוא מספר שזר לאחרים.
ב. האם זה נכון עבור כל 17 מספרים טבעיים רצופים?

פתרון. אם המספר בסדרה לא זר לאחד מהמספרים בסדרה, אז יש לו מחלק, ולכן גם מחלק ראשוני, שלא זר למספרים אחרים בסדרה. מחלק ראשוני זה חייב להיות קטן מ-16, לכן זה 2, 3, 5, 7, 11, או 13.
מחלק 2 יש ל-8 מספרים בדיוק מבין 16 המספרים הנתונים.
בנוסף למספרים זוגיים, מחלק 3 יכול להיות רק ל-3 מספרים. אכן, אם יש 4 מספרים אי-זוגיים שמתחלקים ב-3, אז ההפרש בין הגדול ביותר מבין במספרים האלה לקטן ביות בין המספרים האלה הוא 18, וזה לא יתכן כי יש 16 מספרים רצופים.
באופן דומה, יכולים להיות רק 2 מספרים אי-זוגיים שמתחלקים ב-5, רק שניים שמתחלקים ב-7, רק אחד שמתחלק ב-11, ורק אחד שמתחלק ב-13 (ויתכן שבחלק מהמקרים יש קצת פחות וספרנו דברים פעמיים).
את 16 המספרים הרצופים $n+1,...,n+16$ נחלק ל-3 חלקים: **כנפיים** של 5 מספרים בכל צד (כנף שמאלי $n+1,...,n+5$, כנף ימני $n+12,...,n+16$) **וליבה** של 6 מספרים באמצע: $n+6,...,n+11$. בליבה יש בדיוק 3 מספרים זוגיים, ויש 3 מספרים אי-זוגיים, שאחד מהם מתחלק ב-3.
אם אחד מהמספרים בליבה מתחלק ב-11, או ב-13, זה עדיין לא אומר שיש בקבוצה עוד מספר עם אותו מחלק, הרי כל מספר במרחק 11 או יותר מהמספר בליבה נמצא מחוץ לרצף שבחרנו. לכן שני המספרים בליבה שלא מתחלקים ב-2 וב-3, אחד מהם מתחלק ב-5 והשני ב-7. לכן אין בכל הקבוצה עוד מספר אי-זוגי שמתחלק ב-7 (הרי הוא נמצא במרחק 14 מהמספר שנמצא בליבה). יכולים להיות שני מספרים אי-זוגיים שמתחלקים ב-5, שהמרחק בינם שווה ל-10, אבל אז המרחק אחד מהם הוא בדיוק בקצה של הליבה, והשני בקצה של הקבוצה (למשל $n+1$, $n+11$ או להפך $n+6$, $n+16$).
ובכן מבין 8 המספרים אי-זוגיים יש 5 בדיוק שנמצאים בכנפיים, והם לא מתחלקים ב-7, אחד מהם יכול להתחלק ב-5 (הקיצוני), אחד יכול להתחלק ב-11, אחד ב-13, ושניים האחרים חייבים להתחלק ב-3. אם נקטין את אחד הכמויות בספירה הזאת, כבר נדלג על מספר אי-זוגי בכנפיים, ואז יהיה מספר אי-זוגי בכנפיים שזר למספרים האחרים.

לה"כ ניתן להניח כי המספר הראשון $n+1$ הוא אי-זוגי. אכן, אם לא ניתן לשנות את הסימן לכל המספרים, ולהוסיף לכולם כפולה גדולה של $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$, ואז נקבל רצף אם אותם תכונות.

$n+1$		$n+3$		$n+5$		$n+7$		$n+9$		$n+11$		$n+13$		$n+15$	
5		3						3		5				3	

לה"כ ניתן להניח כי המספרים $n+1, n+11$ מתחלקים ב-5, ויש עוד שני מספרים אי-זוגיים בכנפיים שמתחלקים ב-3, והם במרחק 12 זה מזה, לכן אלה בהכרח $n+3, n+15$, לכן $n+5$, $n+13$ מתחלקים אחד מהם ב-11 והשני ב-13 בסדר כלשהו. נתבונן במספר שמתחלק ב-13.

אם זה $n+13$ אז אין עוד מספר ברצף של 16 מספרים שמתחלק ב-13, הרי n וגם $n+26$ מחוץ לרצף. אבל גם אם זה $n+5$, עדיין המספר הזה זר לכולם. ובכן, יש מספר שזר לכולם.

ב. נוסיף לעוד מספר בצד שמאל לטבלה שלנו (המתאים למספר n). ההוכחה הקודמת נופלת, במקום שבו ניתחנו מקרה של $n+13$ מתחלק ב-13, ואמרנו ש-n מחוץ לתחום.

אז מצליחים לייצר טבלה (שבעצם כמעת יצרנו אותה בסעיף הקודם) שמתקבלת על הדעת

	$n+1$		$n+3$		$n+5$		$n+7$		$n+9$		$n+11$		$n+13$		$n+15$	
3 7 13	5		3		11	3 5	7		3		5	3	13	7	3	5 11

בכל עמודה רשומים מחלקים אי-זוגיים ראשוניים, והמספרים הזוגיים מסומנים בצבע כהה, ואז הכול מסתדר, כלומר בכל עמודה לבנה יש מחלק אחד לפחות, שמופיע גם בעוד עמודה. התנאי לכך שהטבלא תסתדר בצורה כזאת, הוא ש-n מתחלק ב-$3\cdot 7\cdot 13$ ובנוסף $n+16$ יתחלק ב-55, וזה מתאפשר בגלל משפט שאריות הסיני.

5. נתון מספר חיובי שלם M. על הדף כתובים כל המספרים הטבעיים שהם לפחות M^2 וקטנים ממש מ-$(M+1)^2$. לכל זוג מספרים $a\le b$ שמופיעים בדף, שחר כותב על הלוח את מכפלתם $a\cdot b$. הראו ששחר לא כתב אף מספר יותר מפעם אחת.

פתרון. נשים לב כי $4ab+(a-b)^2=(a+b)^2$.

אבל עבור המספרים בדף $|a-b|<(M+1)^2-M^2=2M+1$, כלומר $|a-b|\le 2M$.

לכן $(a-b)^2\le 4M^2$.

מצד שני $(a+b)^2\ge(2M^2)^2$ כאן הפרשים גדולים.

נניח כי שני המספרים a,b נתנו את אותה המכפלה כמו שני המספרים c,d.

אז $4ab=4cd$. לכן

$$(a-b)^2-(c-d)^2=(a+b)^2-(c+d)^2 \qquad (*).$$

הפרש בין שני ריבועים שקטנים או שווים ל-$4M^2$ בערכו המוחלט לא עולה על $4M^2$.

הפרש של שני ריבועים שגדולים מ-$4M^4$ הוא לפחות

$$(2M^2+1)^2-(2M^2)^2=4M^2+1$$

בערכו המוחלט, אלה אם כן המספרים זהים (הרי ההפרשים בין הריבועים הסמוכים הולכים וגדלים). לכן הפרש של שני ריבועים שגדולים מ-$4M^4$ שווה להפרש של שני הריבועים שקטנים או שווים $4M^2$ רק בתנאי אחד: כאשר שני הריבועים שווים בכל הפרש. כלומר $(*)$ מתקיים, רק אם $a+b=c+d$ ובנוסף $|a-b|=|c-d|$.
מזה קל להסיק, כי $\{a,b\}=\{c,d\}$.

6. שחר כתב על דף אחר 100 מספרים טבעיים שקטנים מ-25000. לכל זוג מספרים $a\le b$ שמופיעים בדף, שחר כתב על הלוח את סכומם $a+b$. האם ייתכן שגם הפעם שחר לא כתב על הלוח אף מספר יותר מפעם אחת?

פתרון. נגדיר לכל מספר k מספר אי-שלילי הכי קטן עבורו $s(k)$ עבורו
$$s(k)=k^2 \pmod p.$$
כמובן, $0\le s(k)<p$
נתבונן במספרים $a_k=2pk+k^2$, כאשר $k=0,1,2,3,...,p-1$.
אם נחלק את a_k+a_m אם שארית ב-$2p$ אז נקבל
$$a_k+a_m=2p(k+m)+\big(s(k)+s(m)\big).$$
כלומר המנה היא $k+m$, והשארית היא $s(k)+s(m)$.
לכן אם $a_k+a_m=a_\ell+a_n$, אז בהכרח
$$k+m=\ell+n$$
וגם
$$s(k)+s(m)=s(\ell)+s(n)$$
כלומר מודולו p מקבלים
$$\begin{cases}k+m=\ell+n \pmod p\\ k^2+m^2=\ell^2+n^2 \pmod p\end{cases}$$
אם p מספר ראשוני אי-זוגי אז ריבוע של משוואה ראשונה פחות משוואה שנייה חלקי 2
$$km=\ell n \pmod p$$
ובכן, אם נסמן $k+m=u$, $km=v$ אז מודולו p המספרים k,m הם שני השורשים של המשוואה הריבועית $x^2-ux+v=0$, אבל אותו דבר נכון לגבי ℓ,n. לכן
$$\{k,m\}=\{\ell,n\}.$$
ובכן, שום סכום לא מקבלים פעמיים.
המספר הכי גדול בסדרה a_n הוא $a_{p-1}=2p(p-1)+s(p-1)=2p(p-1)+1$.
למשל עבור $p=101$ מקבלים 101 מספרים (או 100 מספרים, הרי מתחילים מ-0) שמקיימים את התנאי.