תרגיל 9

1. האם ניתן להציב מספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 באמצעי הצלעות ובקודקודים של מחומש משוכלל (כאשר משתמשים בכל מספר פעם אחד בדיוק), כך שכל סכומי שלשות המספרים על הצלעות יהיו שווים?

2. עבור אילו n טבעיים ניתן לחלק את המספרים $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ לשתי מחלקות, כך שמכפלת המספרים בשתי המחלקות שווה?

3. בהינתן ראשוני p, מצאו את כל המספרים k עבורם ניתן לחלק את המספרים מ-1 עד k ל-p קבוצות, כך שלכל קבוצה סכום מספרים שווה.

4. א. הוכיחו כי מבין כל 16 טבעיים רצופים, תמיד ניתן למצוא מספר שזר לאחרים.
ב. האם זה נכון עבור כל 17 מספרים טבעיים רצופים?

5. נתון מספר חיובי שלם M. על הדף כתובים כל המספרים הטבעיים שהם לפחות M^2 וקטנים ממש מ-$(M+1)^2$. לכל זוג מספרים $a \le b$ שמופיעים בדף, שחר כותב על הלוח את מכפלתם $a \cdot b$. הראו ששחר לא כתב אף מספר יותר מפעם אחת.

6. שחר כתב על דף אחר 100 מספרים טבעיים שקטנים מ-25000. לכל זוג מספרים $a \le b$ שמופיעים בדף, שחר כתב על הלוח את סכומם $a+b$. האם ייתכן שגם הפעם שחר לא כתב על הלוח אף מספר יותר מפעם אחת?