תרגיל 8

1. עבור a,b,c חיוביים הוכיחו כי $a^{10}+b^{10}+c^{10}+8\ge ab+bc+ca+8abc$.
האם זה נכון גם לכל שלישיות של מספרים ממשיים, לאו דווקא חיוביים?

פתרון. אם נחליף כל מספר בערך המוחלט שלו, האגף השמאלי לא ישתנה, והאגף הימני יכול רק לגדול. לכן אם נציג הוכחה שעובדת למספרים אי-שליליים, זה יעבוד גם למספרים ממשיים כלשהם. נציג הוכחה למספרים אי-שליליים.
לפי AM-GM,

$$\frac{a^{10}+b^{10}+c^{10}+7}{10}\ge\sqrt[10]{a^{10}\cdot b^{10}\cdot c^{10}}=abc,$$

במילים אחרות (נכפיל ב-8 את שני האגפים)

$$\frac{4}{5}\left(a^{10}+b^{10}+c^{10}+7\right)\ge 8abc.$$

כמו כן, גם לפי AM-GM,

$$\frac{a^{10}+b^{10}+8}{10}\ge\sqrt[10]{a^{10}b^{10}}=ab.$$

נחבר 3 אי-שוויונים סימטריים כאלה אם אי-השוויון הקודם ונקבל

$$\sum_{cyc}\frac{a^{10}+b^{10}+8}{10}+\frac{4}{5}\left(a^{10}+b^{10}+c^{10}+7\right)\ge\sum_{cyc}ab+8abc$$

$$\sum_{cyc}a^{10}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{4}{5}\right)+\frac{24}{10}+\frac{28}{5}\ge\sum_{cyc}ab+8abc.$$

2. בהינתן $x^2+y^2=25$, $z^2+t^2=16$, $xt-yz=20$. מצאו את הערך המקסימלי האפשרי עבור xz.

פתרון ראשון.

$$400=\left(x^2+y^2\right)\left(z^2+t^2\right)=\left(xz+yt\right)^2+\left(xt-yz\right)^2=\left(xz+yt\right)^2+400.$$

זאת אומרת $xz+yt=0$. ולכן, לפי אי-שוויון קושי-שוורץ,

$$400=\left(x^2+y^2\right)\left(z^2+t^2\right)\ge\left(xz-yt\right)^2=\left(2xz\right)^2=4\left(xz\right)^2.$$

לכן $|xz|\le 10$. השוויון מושג למשל כאשר $x=-y=\frac{4}{\sqrt{2}}$, וכן $z=t=\frac{5}{\sqrt{2}}$, ואז כל אי-השוויונים הופכים לזהויות.

פתרון שני. נתבונן בווקטורים $u=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}t\\z\end{pmatrix}$, ואז התנאים הם $|u|=4$, $|v|=5$, $\langle u,v\rangle=20$. נגדיר ווקטורים $\hat{u}=\frac{u}{4}$, $\hat{v}=\frac{v}{5}$, אז $|\hat{u}|=|\hat{v}|=1$ וכן $\langle\hat{u},\hat{v}\rangle=1$, ולכן

בעצם $\hat{u}=\hat{v}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x/4\\z/5\end{pmatrix}$. כל לראות כי $2pq\le p^2+q^2=1$ והשוויון מתקיים כאשר $p=q=\frac{1}{\sqrt{2}}$, ולכן $xz=20pq\le 10$.

3. המספרים $x_1,...,x_n$ מקיימים $0\le x_i\le 1$ לכל i. הוכיחו כי
$\left(1+x_1+x_2+...+x_n\right)^2\ge 4\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)$.

פתרון ראשון. ניתן להוכיח לה"כ כי $x_1\ge x_2\ge...\ge x_n$.
נוכיח באינדוקציה. עבור $n=1$ מקבלים: $1+x_1\ge 2x_1$ ולכן $\left(1+x_1\right)^2\ge 4x_1^2$.
נניח שהוכחנו כבר עבור $n-1$ ולכן $\left(1+x_1+...+x_{n-1}\right)^2\ge 4\left(x_1^2+...+x_{n-1}^2\right)$.
אז נשאר להוכיח כי $\left(1+x_1+x_2+...+x_n\right)^2-\left(1+x_1+...+x_{n-1}\right)^2\ge 4x_n^2$, כלומר ש-
$$2\left(1+x_1+x_2+...+x_{n-1}\right)\cdot x_n+x_n^2\ge 4x_n^2$$
$$2\left(1+x_1+x_2+...+x_{n-1}\right)\cdot x_n\ge 3x_n^2$$
$$2\left(1+x_1+x_2+...+x_{n-1}\right)\ge 3x_n$$
זה ברור לכל $n>1$, הרי $x_1\ge x_n$, ולכן
$2\left(1+x_1+x_2+...+x_{n-1}\right)\ge 2\left(1+x_1\right)\ge 4x_n\ge 3x_n$.

אי-השוויון הופך לזהות כאשר אחד מבין המספרים $x_1,...,x_n$ שווה 1 והאחרים 0.

פתרון שני (עמרי מרכוס)**.** נגדיר פולינום
$p\left(x\right)=x^2-\left(1+x_1+x_2+...+x_n\right)x+\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)$.
זה פולינום ריבועי עם הקרניים למעלה, אבל מצד שני
$$p\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)=\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2-\left(1+\sum_{i=1}^n x_i\right)\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{i=1}^n x_i^2=\sum_{i=1}^n\left(x_i^2-x_i\right)\le 0$$
לכן לפולינום יש שורשים, כלומר $\Delta\ge 0$, כלומר
$\left(1+x_1+x_2+...+x_n\right)^2-4\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)\ge 0$.
מש"ל.

4. בהינתן $x^3+y^3+z^3=0$. הוכיחו כי
$2\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)\left(x^4+y^4+z^4\right)\ge\left(x^2+y^2+z^2\right)^3$.

פתרון. יהיה $x+y+z=3u$, ו- $xy+xz+yz=3v^2$ כאשר v^2 עלול להיות שלילי, ו-
$xyz=w^3$.

אז $x^2+y^2+z^2=9u^2-6v^2$, כמו כן $\sum_{cyc}x^2y^2=\left(3v^2\right)^2-6uw$, ובאופן דומה

$$x^4+y^4+z^4=\left(9u^2-6v^2\right)^2-2\left(\left(3v^2\right)^2-6uw^3\right)=$$

$$=81u^4-108u^2v^2+36v^4-18v^4+12uw^3=81u^4-108u^2v^2-18v^4+12uw^3$$

לכן אי-השוויון מקבל צורה

$$2\left(9u^2-6v^2-3v^2\right)\left(81u^4-108u^2v^2+18v^4+12uw^3\right)\geq\left(9u^2-6v^2\right)^3.$$

ניתן לקזז 3^3 ולקבל

$$2\left(u^2-v^2\right)\left(27u^4-36u^2v^2+6v^4+4uw^3\right)\geq\left(3u^2-2v^2\right)^3.$$

בהינתן האילוץ $0=x^3+y^3+z^3=27u^3-27uv^2+3w^3$, ניתן להציב

$$w^3=9uv^2-9u^3,$$

ולקבל אי-שוויון

$$2\left(u^2-v^2\right)\left(27u^4-36u^2v^2+6v^4+4u\left(9uv^2-9u^3\right)\right)\geq\left(3u^2-2v^2\right)^3$$

$$2\left(u^2-v^2\right)\left(6v^4-9u^4\right)\geq\left(27u^6-18u^4v^2+36u^2v^4-8v^6\right)$$

$$0\leq\left(27u^6-18u^4v^2+36u^2v^4-8v^6\right)+\left(18u^6-18u^4v^2-12u^2v^4+12v^6\right)$$

$$0\leq 45u^6-36u^4v^2-24u^2v^4+4v^6.$$

נציין שלכל 3 מספרים x,y,z מתקיים

$$\left(x-y\right)^2\left(x-z\right)^2\left(y-z\right)^2\geq 0$$

נשאיר כתרגיל לקוראים ש-

$$\prod_{cyc}\left(x-y\right)^2=\sum_{cyc}\left(x^4y^2+x^4z^2-2x^4yz-2x^3y^3+2x^3y^2z+2x^3z^2y-2xyz\right)=$$

$$=27\left(3u^2v^4-4v^6-4u^3w^3+6uv^2w^3-w^6\right)$$

זו זהות שימושית מאוד עבור המשתמשים בשיטה u,v,w. מי שרוצה להשתלט על שיטת u,v,w, מומלץ שיזכור את הזהות. הדרך לזכור את הזהות היא לפתח אותה בעצמכם. כמובן, האנשים שלא מסוגלים לפתח את הזהות לבד עקב היותם שמנים גם לא ירצו לקרוא את ההוכחה, לכן אנחנו נדלג על ההוכחה.

במקרה שלנו $w^3=9uv^2-9u^3$, ונציב את זה בזהות:

$$0\leq 3u^2v^4-4v^6+\left(6uv^2-4u^3\right)\left(9uv^2-9u^3\right)-\left(9uv^2-9u^3\right)^2$$

$$0\leq 3u^2v^4-4v^6+\left(6uv^2-4u^3-9uv^2+9u^3\right)\left(9uv^2-9u^3\right)$$

$$0\leq 3u^2v^4-4v^6+\left(-3uv^2+5u^3\right)\left(9uv^2-9u^3\right)$$

$$0\leq 3u^2v^4-4v^6-27u^2v^4+72u^4v^2-45u^6$$

נחליף סימן ונקבל: $0\geq 4v^6+24u^2v^4-72u^4v^2+45u^6$.

וזה בדיוק מה שרצינו להוכיח.

5. המספרים a,b,c,d לא שליליים, ומקיימים

$$a^2+b^2+c^2+d^2=ab+ac+ad+bc+bd+cd$$

הוכיחו כי $a^4+b^4+c^4+d^4\geq 28abcd$.

פתרון. שוב נשתמש בשיטת u,v,w.

נסמן $a+b+c=3u$, $ab+bc+ac=3v^2$, $abc=w^3$. באמצעות האילוץ רואים כי d אינו תלוי ב-w. כמו כן, אי-השוויון ליניארי ב-w^3, הרי הוא מדרגה רביעית (הרי ניתן להציגו כפולינום ב-d,u,v^2,w^3 ובפולינום זה w^3 לא יופיע בחזקה הגדולה מ-1).

לכן מספיק לבדוק בקצוות של התחום המותר ל-w. הקצוות מתאימות למצבים ששני שורשי הפולינום מתלכדים, או ש-w מתאפס.

אם $w=0$ אי-השוויון ברור: $a^4+b^4+c^4+d^4\geq 0$.

אם שני שורשים מלכדים, לה"כ $b=c=1$ (הרי אי-השוויון וגם האילוץ הומוגניים). ואז האילוץ הוא $a^2+d^2+2=ad+2a+2d+1$,

ואי-השוויון הוא $a^4+d^4+2\geq 28ad$.

שוב נשתמש באותה שיטה: נסמן $a+d=2p$, $ad=q^2$. אז האילוץ הוא

$$4p^2-3q^2-4p+1=0.$$

ואי-השוויון הוא

$$a^4+d^4=\left(a^2+d^2\right)^2-2a^2d^2=\left(4p^2-2q^2\right)^2-2q^4=16p^4-16p^2q^2+2q^4$$

ולכן אי-השוויון הוא $16p^4-16p^2q^2+2q^4+2\geq 28q^2$, או לאחר צמצום

$$8p^4-8p^2q^2+q^4+1\geq 14\cdot q^2.$$

נציב $q^2=\frac{4p^2-4p+1}{3}$ ונקבל

$$8p^4+\frac{4p^2-4p+1}{3}\left(\frac{4p^2-4p+1}{3}-8p^2-14\right)+1\geq 0$$

$$72p^4+\left(4p^2-4p+1\right)\left(4p^2-4p+1-24p^2-42\right)+9\geq 0$$

$$72p^4+\left(4p^2-4p+1\right)\left(-20p^2-4p-41\right)+9\geq 0$$

$$72p^4-\left(80p^4-64p^3+168p^2-160p+41\right)+9\geq 0$$

$$-8p^4+64p^3-168p^2+160p-32\geq 0$$

$$p^4-8p^3+21p^2-20p+4\leq 0$$

קל לנחש ש-2 הוא שורש של הפולינום, ואפילו שורש כפול

$$p^4-8p^3+21p^2-20p+4=$$

$$=p^4-2p^3-6p^3+12p^3+9p^2-18p-2p+4=$$

$$=\left(p-2\right)\left(p^3-6p^2+9p-2\right)=\left(p-2\right)\left(p^3-2p^2-4p^2+8p+p-2\right)=$$
$$=\left(p-2\right)^2\left(p^2-4p+1\right)$$

ובכן, צריך להראות כי $\left(p-2\right)^2\left(p^2-4p+1\right)\geq 0$, כלומר מספיק להראות כי $p^2-4p+1\leq 0$.

זה לא נכון לכל מספר p, אבל כן נכון למספר p שלנו.

נזכר שבעצם $p^2=\left(\frac{a+d}{2}\right)^2\geq ad=q^2$, כלומר $p^2\geq\frac{4p^2-4p+1}{3}$.

כלומר $3p^2\geq 4p^2-4p+1$, ז. א. $0\geq p^2-4p+1$. מש"ל.

6. מספרים חיוביים a,b,c מקיימים $a+b+c=3$. הוכיחו כי $a\cdot\sqrt[3]{a+b}+b\cdot\sqrt[3]{b+c}+c\cdot\sqrt[3]{c+a}\geq 3\cdot\sqrt[3]{2}$.

פתרון. ברישום מקוצר צ"ל כי $\sum_{cyc}a\cdot\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}\geq 3$. נוכיח בשורה אחת (מתגלגלת):

$$\sum_{cyc}a\cdot\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}=\sum_{cyc}\frac{a\cdot\frac{a+b}{2}}{\sqrt[3]{1}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}}\overset{\text{(AM-GM)}}{\geq}\sum_{cyc}\frac{a\cdot\frac{a+b}{2}}{\left(\frac{1+2\cdot\frac{a+b}{2}}{3}\right)}=\sum_{cyc}\frac{3a\left(a+b\right)}{2\left(1+a+b\right)}=$$
$$=\frac{9}{2}\sum_{cyc}\frac{a\left(a+b\right)}{4a+4b+c}=\frac{9}{2}\cdot\left(\sum_{cyc}\left(\frac{a^2+ab}{4a+4b+c}-\frac{a}{4}\right)+\frac{a+b+c}{4}\right)=$$
$$=\frac{9}{2}\cdot\left(-\sum_{cyc}\frac{ac}{4\left(4a+4b+c\right)}+\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{8}-\frac{9}{8}\sum_{cyc}\frac{ac}{4\left(4a+4b+c\right)}=$$
$$=\frac{27}{8}-\frac{9}{8}\cdot\sum_{cyc}\frac{ac}{2\left(2a+b\right)+\left(2b+c+c\right)}\overset{\text{(CS)}}{\geq}$$
$$\geq\frac{27}{8}-\frac{1}{8}\cdot\sum_{cyc}ac\left(\frac{2^2}{2\left(2a+b\right)}+\frac{1^2}{2b+c}\right)=\frac{27}{8}-\frac{1}{8}\cdot\sum_{cyc}\left(\frac{2ac}{2a+b}+\frac{ac}{2b+c}\right)=$$
$$=\frac{27}{8}-\frac{1}{8}\cdot\sum_{cyc}\left(\frac{2ab}{2b+c}+\frac{ac}{2b+c}\right)=\frac{27}{8}-\frac{1}{8}\cdot\sum_{cyc}a=\frac{27}{8}-\frac{3}{8}=\frac{24}{8}=3$$