תרגיל 8

1. עבור a,b,c חיוביים הוכיחו כי $a^{10}+b^{10}+c^{10}+8\geq ab+bc+ca+8abc$.
האם זה נכון גם לכל שלישיות של מספרים ממשיים, לאו דווקא חיוביים?

2. בהינתן $x^2+y^2=25$, $z^2+t^2=16$, $xt-yz=20$. מצאו את הערך המקסימלי האפשרי עבור xz.

3. המספרים $x_1,...,x_n$ מקיימים $0\leq x_i\leq 1$ לכל i. הוכיחו כי
$\left(1+x_1+x_2+...+x_n\right)^2\geq 4\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)$.

4. בהינתן $x^3+y^3+z^3=0$. הוכח כי
$2\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)\left(x^4+y^4+z^4\right)\geq\left(x^2+y^2+z^2\right)^3$.

5. המספרים a,b,c,d לא שליליים, ומקיימים
$a^2+b^2+c^2+d^2=ab+ac+ad+bc+bd+cd$
הוכיחו כי $a^4+b^4+c^4+d^4\geq 28abcd$.

6. מספרים חיוביים a,b,c מקיימים $a+b+c=3$. הוכיחו כי
$a\cdot\sqrt[3]{a+b}+b\cdot\sqrt[3]{b+c}+c\cdot\sqrt[3]{c+a}\geq 3\cdot\sqrt[3]{2}$.