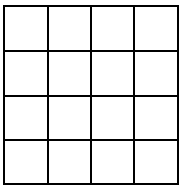
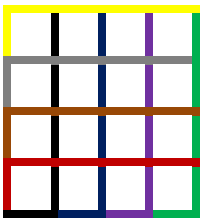
תרגיל 7



1. האם ניתן לכסות את קווי הרשת שבציור (אורך צלע המשבצת 1):
א. על ידי 5 קווים שבורים באורך 8?
ב. על ידי 8 קווים שבורים באורך 5?

תשובות. א. לא. ב. כן.



פתרון. א. נשים לב שבגרף יש 12 קודקודים מדרגה אי-זוגית. כל קודקוד כזה הוא חייב להיות נקודת קצה של אחד המסלולים. אבל סה"כ יש 10 קצוות.
ב. הכיסוי בציור.

2. קודקודים של גרף ממוספרים על ידי מספרים מ-1 עד N (כאשר N מספר טבעי). שני קודקודים מחוברים על ידי קשת, אם ורק אם הפרש בין מספריהם שווה ל-7 או ל-11. כמה רכיבי קשירות יש לגרף? (התשובה כמובן תלויה ב-N.)

תשובה.

$$\begin{cases} N & N \le 7 \\ 7 & 7 < N \le 11 \\ 18 - N & 11 < N < 17 \\ 1 & N \ge 17 \end{cases}.$$

פתרון. כל עוד $N \le 7$ הקודקודים לא מקושרים, לכן יש בדיוק N רכיבי קשירות. ברגע שמגדילים את N מעבר ל-7, כל קודקוד חדש מקושר כבר לקודקוד שכבר היה, לכן כמות רכיבי קשירות לא עולה. כאשר $8 \le N \le 11$, הקודקוד האחרון מקושר לקודקוד אחד בדיוק, לכן כמות ככיבי קשירות זהה לכמות של רכיבי קשירות עבור $N-1$, ולכן עבור $8 \le N \le 11$ כמות של רכיבי קשירות שווה ל-7.
כאשר $N > 11$, הקודקוד האחרון מקושר לשני קודקודים קודמים. לכן זה שהוספנו את הקודקוד האחרון ישכול או לשמור על כמות של רכיבי קשירות (עם שני החברים שלו גם ככה היו באותו רכיב קשירות), או להקטין את מספר רכיבי הקשירות שלו ב-1 (עם שני החברים שלו ברכיבי קשירות שונים).
אנחנו טוענים, שב-6 המעברים הראשונים $17 \to 16 \to 15 \to 14 \to 13 \to 12 \to 11$ כמות של רכיבי קשירות יורדת ב-1 כל פעם, ואחר כך זה יישאר 1.
מספיק להראות, שב-$N = 17$ כבר הגענו לרכיב קשירות אחד. הרי מכיוון שב-11 יש 7 רכיבי קשירות, וכל פעם זה יורד ב-1 או נשאר אותו דבר, זה חייב לרדת בכל פעם ב-1 במעברים מ-11 עד 17.
ובכן, נשאר להוכיח שעבור $N = 17$ הגרף קשיר.
נתבונן קודם בגרף שנוצר עבור $N = 18$. לכל מספר $1 \le x \le 18$, נתבונן במספרים $x+11$ ו-$x-7$. ההפרש בין המספרים שווה ל-18 בדיוק, לכן לא יתכן ששני המספרים נמצאים בתחום $[1,18]$ אבל בדיוק אחד מהם תמיד נמצא בתחום. לכן לכל מספר אפשר להוסיף 7 או להחסיר 11 ולהישאר בתחום (אבל לא בו-זמנית). לכן אפשר להגדיר כזה מסלול על הגרף: למספר נתון מוסיפים 7 או מחסירים 11. מסלול זה אף פעם לא נגמר. כל מהלך (גם $+7$, וגם -11) מופיע אינסוף פעמים. לכן כאשר מסתכלים מודולו 7 אז אנו

נעבור על כל השאריות, הרי 7 זר ל-11. כאשר עוברים על שארית מסוימת מודולו 7, אז עוברים על כל המספרים שנותנים את השארית הזו (כי במסלול שלנו גם הליכה אחורה מוגדרת חד-משמעית). לכן המסלול שלנו עובר על כל הקודקודים של הגרף באופן מעגלי. אנחנו משתמשים בכל הקשתות שיש. לכן הגרף שלנו (עבור $N=18$) הוא מעגל.
לכן הגרף עבור $N=17$, מתקבל מורידים קודקוד מגרף שהוא מעגל, אפשר להציגו בתור סדרה של קודקודים, כאשר הקודקודים הסמוכים מחוברים, ולכן הוא קשיר.

3. במדינה זרה 1993 ערים. מכל עיר יש טיסות לפחות ל-93 ערים אחרות. מכל עיר ניתן להגיע לכל עיר אחרת.
א. הראו, שאפשרי לעשות זאת באמצעות 63 טיסות לכל היותר.
ב. האם ניתן להחליף 63 בשאלה זו במספר קטן יותר?

פתרון. א. ניקח שני ערים, A ו-B, שבינם צריך לפחות 64 טיסות. בעצם, אם יש כאלה אז כאשר מתקדמים מ-A ל-B במסלול עם מספר הקטן ביותר של טיסות, אז אחרי 64 טיסות מגיעים לעיר שבשביל להגיע אליו מ-A צריך בדיוק 64 טיסות. לכן ניתן להניח לה"כ שעל מנת להגיע מ-A ל-B צריך בדיוק 64 טיסות.
ובכן, נחלק את כל הערים לסוגים, בהתאם לכמה טיסות צריך על מנת להגיע מ-A לעיר הזאת. A היא העיר היחידה מסוג 0, השכנים של A בגרף הם מסוג 1, וכך הלאה: הערים מסוג N אלה ערים שהן לא מסוג יותר נמוך, אבל מקושרות לערים מסוג $N-1$.
נשים לב, שיכולות להיות טיסות מעיר לעיר, רק אם הפרש בין הסוגים אינו עולה על 1.
אכן, אם יש טיסה בין עיר מסוג N לעיר מסוג $N+K$, כאשר $K>1$, אז העיר מסוג $N+K$ היא בעצם עיר מסוג $K+1$.
יש לפחות 93 ערים מסוג 1, ויש לפחות 94 ערים מסוגים $N-1, N, N+1$, בהנחה שיש ערים מסוג N. אכן, יש עיר מסוג N ואליו מקושרים ישירות עוד 93 ערים שכולם מהסוגים $N-1, N, N+1$.
לכן אם יש ערים מסוג 64 כמו שטוענים, אז יש סה"כ חוץ מ-A עוד 94 ערים מסוגים 0 או 1, עוד 94 ערים מסוג 2, 3 או 4, עוד 94 ערים מסוג 5, 6 או 7, ..., עוד 94 ערים מסוג 62, 63, 64 (ובשביל זה מספיק קיום של עיר מסוג 63) וזה ביחד נותן לפחות

$$94\cdot\left(1+\frac{63}{3}\right)=94\cdot 22=(100-6)(20+2)=2000+200-120-12=2068.$$

אבל אין 2068 ערים, יש רק 1993.

ב. כבר הראנו שבעצם אין ערים מסוג 63, כלומר ב-62 טיסות אפשר להגיע מכל עיר לכל עיר. על מנת להראות ש-62 אפשרי, נבנה דוגמה.
כל הערים בדוגמה יהיו מחולקות לסוגים, מ-0 עד 62. הערים יהיו מקושרות על ידי טיסה, אם הפרש הסוגים שלהם לא עולה על 1.
נסכם שלכל $0\le k\le 20$ בסוג $3k$ ו-$3k+2$ תהיה עיר אחת בדיוק.
בנוסף, נניח שיש 93 ערים מסוג 1, ועוד 93 ערים מסוג 61, ולכל $1\le k<20$ יש 92 ערים מסוג $3k+1$. אז קל לראות שלכל עיר מקודרות 93 ערים לפחות, ומהעיר היחידה מסוג 0 צריך 62 טיסות על מנת להגיע לעיר היחידה מסוג 62. סה"כ יש בדוגמה זאת $21\cdot 94-2=(20+1)(100-6)-2=2000+100-120-6-2=1972$ ערים.
אפשר להוסיף עוד 11 ערים למשל מסוג 1, וקשר אותם לכל הערים האחרות מהסוגים 0, 1, ו-2.

4. הוועד המרכזי של מפלגת האחדות העממית, ששולט כבר שנים רבות במדינה זרה, מורכב מ-12 חברים. חבר זה רק השם הרשמי לאחד שנמצא בוועד, זה לא אומר שהם מחבבים זה את זה. למעשה, מבין כל 9 חברי ועד ניתן למצוא חמישה שכולם שונאים זה את זה. הוכיחו שיש בוועד 6 חברים שכולם שונאים זה את זה.

פתרון. אנחנו נגיד ששניים מחוברים אם ורק אם הם לא שונאים זה את זה.

טענה. כל גרף שאין בו מעגלים אי-זוגיים הוא גרף דו-צדדי; כלומר, ניתן לצבוע את קודקודיו בשחור ולבן כך שהצבעים בקצוות של כל קשת שונים.

זו טענה שקל יותר להוכיח מאשר לנסח, לכן נשאיר את ההוכחה כתרגיל לקוראים. אם אנחנו נמצאים במצב, שהטענה מתקיימת, אז קל למצוא תת-קבוצה של 6 קודקודים שחורים או 6 קודקודים לבנים שהם לא מקושרים. לכן מעכשיו נתבונן במצב, שיש בגרף מעגלים אי-זוגיים.
כאשר יש מעגל אי-זוגי, אז יש גם מעגל אי-זוגי מינימלי. הקודקודים של המעגל האי-זוגי המינימלי, פרט לקודקודים הסמוכים, אינם מחוברים. הרי אחר היו שני מעגלים יותר קצרים, שאחד מהם הוא אי-זוגי. מרגע זה נפריד את הגרפים האפשריים למקרים, בהתאם לאורך המעגל האי-זוגי המינימלי: 3, 5, 7, 9, 11.

לפני שאנחנו ניגש לבדיקת מקרים, ננסח עוד טענה כתרגיל לקוראים:
טענה 2. נניח שבגרף לכל שתי קשתות יש קודקוד משותף. אז הגרף הוא משולש (ועוד נקודות מבודדות אולי) או שלכל הקשתות יש קודקוד משותף.

וכעת, לבדיקת מקרים. אם אורך המעגל המינימלי הוא

(3) יש משולש ABC, ועוד 9 קודקודים.
אם יש מבין הקודקודים האחרים עוד משולש DEF, אז לכל 3 קודקודים נוספים X, Y, Z מבין 9 הקודקודים A, B, C, D, E, F, X, Y, Z יש 5 שלא מקושרות זו לזו. מבין 5 הקודקודים A, B, C יכול לתת רק נציג אחד, וכך גם D, E, F ולכן X, Y, Z כולם שייכים לחמישייה של לא מקושרים. לכן חוץ מ-A, B, C, D, E, F כל הקודקודים לא מקושרות, שזה כבר 6 קודקודים.
כעת נניח שיש חוץ מ-A, B, C שני קשתות ללא קצה משותף: קשת MI וקשת NK, אז ניקח 9 הקודקודים הבאים: A, B, C, M, I, N, K, X, Y. מבינם יש 5 שלא מכירים זה את זה, רק אחד מבין A, B, C, רק 2 מבין M, I, N, K, ולכן חייבים להוסיף את X ואת Y. מסקנה X ו-Y לא מקושרים. ובכן, כל הקודקודים חוץ מ-A, B, C, M, I, N, K אינם מקושרים. זה כבר 5 נקודות. עם כל 5 הנקודות האלה אינם מקושרות ל-K, אז אפשר להוסיף את K לרשימה. אם יש בין 5 הקודקודים האחרים קודקוד U שמקושר ל-K, נתבונן בתשיעייה של קודקודים A, B, C, M, I, N, K, U, V, כאשר V זה כל נקודה נוספת. אז יש חמישייה של נקודות לא מקושרות, שמכילה לכל היותר נציג אחד מבין A, B, C, אחד מבין M, I ואחד מבין N, K, ולכן חייבים להוסיף את U ואת V. לא יתכן שבחמישייה זו יש את K כי הוא מקושר ל-U. לכן יש שם את N. לכן V לא מקושר

ל-N, אבל V יכול להיות כל קודקוד שאינו A, B, C, M, I, K, N, V. לכן כל 5 הקודקודים חוץ מ-A , B, C, M, I, K, N אינם מקושרים זה לזה ול-N.

לפי הטענה, נשאר המקרה שבו מבין 9 הקודקודים שאינם A, B, C לכל שני קשתות יש קצה משותף. לפי טענה 2, זה אומר שאו שיש שם משולש, אבל במקרה זה כבר טיפלנו, או שיש קודקוד שמשותף לכל הקשתות. נוריד אותו ויישארו אפילו 8 קודקודים לא מקושרים.

(5) המעגל האי-זוגי הקצר ביותר הוא מחומש ABCDE. נוסיף למחומש זה עוד 4 קודקודים כלשהם. אז אפשר לבחור תת-קבוצה של 5 קודקודים לא מקושרים. רק שני נציגים בחמישייה זו הם קודקודים של המחומש ABCDE. לכן מבין כל 4 קודקודים אחרים יש 3 לא מקושרים. לכן כל שתי קשתות מבין 7 הקודקודים שאינם בחומש, לכל שני קשתות יש קודקוד משותף, ואין משולשים. לכן בעצם כל הקשתות עוברים באותו קודקוד, ולכן מבין 7 הקודקודים שאינם במחומש ניתן להוריד קודקוד כך שכל 6 הקודקודים האחרים יהיו לא מקושרים.

(7) המעגל האי-זוגי הקצר ביותר הוא בעל 7 קודקודים. אם נוסיף להם שני קודקודים כלשהם, אז חייבת להיות תת-קבוצה של 5 קודקודים לא מקושרים, ורק 3 יכולים להגיע מהמעגל. לכן שני קודקודים כלשהם שהוספנו לא מקודרים. ובכן, 5 הקודקודים מחוץ למעגל כולם לא מקושרים. אם יש קודקוד במעגל הנתון, שלא מקושר לכל 5 הקודקודים מחוץ למעגל, אז אפשר להרחיב את החמישייה לשישייה. אם לא, כל אחד מהקודקודים במעגל מקושר לקודקוד מחוץ למעגל. יש 7 קודקודים במעגל, ו-5 מחוץ למעגל, לכן יש שני קודקודים במעגל שמקושרים לאותו הקודקוד P מחוץ למעגל.
אם P מקושר לשני קודקודים סמוכים במעגל, אז יש מעגל באורך 3 בסתירה להנחה שהמעגל הקצר ביותר הוא באורך 7. לכן P מקושר לשני קודקודים לא סמוכים, למשל אם המעגל הוא ABCDEFG, אז P יכול להיות מקושר למשל ל-A ול-C (במרחק 2 על המעגל), או לקודקודים A ו-D (נקודות במרחק 3). אם הנקודות במרחק 3, אז נוצר מחומש ABCDP בניגוד להנחה ש-7 זה המעגל האי-זוגי הקצר ביותר, לכן ניתן להניח לה"כ ש-P מקושר ל-A ול-C. נזכיר שהוכחנו שכל הנקודות מחוץ למעגל ABCDEFG לא מקושרות, אבל אותו דבר אפשר להגיד על כל הנקודות מחוץ למעגל APCDEFG. כמובן גם B ו-P אינן מקושרות, אחרת נוצרים משולשים. לכן כל 6 הנקודות חוץ מהנקודות A, C, D, E, F, G אינן מקושרות.

(9) מעגל הכי קצר באורך 9 נוגד מיידית את הנתון – בכל תת-קבוצה של המעגל בגודל 5 יש שני קודקודים לא מקושרים.

(11) יש מעגל $A_1A_2...A_{11}$ ועוד קודקוד B מחוץ למעגל. אם B לא מקושר לאף קודקוד, אז $A_1, A_3, A_5, A_7, A_9, B$ זו שישייה של קודקודים לא מקושרים. לכן נניח ש-B מקושר לקודקוד A_{11} (אחרת נשנה מספור). בנוסף B מקושר לאחד מבין הקודקודים A_1, A_3, A_5, A_7, A_9 (אחרת הדוגמה שהצגנו עובדת), וזה חייב להיות A_9 אחרת נוצר מעגל אי-זוגי באורך שקטן מ-11.
מאותה סיבה B מקושר לאחד מבין הקודקודים $A_2, A_4, A_6, A_8, A_{10}$, וזה חייב להיות A_2. אבל אז גם $A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9B$ מעגל אי-זוגי שאורכו קטן מ-11.

5. בממלכה 100 אבירים. לא ניתן להושיב את כולם סביב שולחן עגול אחד, כך שמשני הצדדים של כל אחד ישבו שני חברים שלו. למרות זאת, אם נבחר רביעיית אבירים כלשהי, או שיש לאחד מהם שני חברים מבין שלושה האחרים, או שלכל אביר ברביעייה יש חבר באותה רביעייה. הוכיחו, שניתן לבחור שני אבירים, שכל אביר אחר מכיר לפחות אחד מהאבירים שבחרנו.

פתרון. ובכן, בגרף פשוט 100 קודקודים, אין מעגל המילטון, בכל תת-גרף של 4 יש לפחות 2 קשתות, צריך להוכיח שיש שני קודקודים שכל קודקוד מחובר לאחד מהם.

נניח שאין מסלול המילטון. נבחר מסלול S ארוך ככל האפשר שלא עובר באף קודקוד יותר מפעם אחד. את קצוות המסלול נסמן A ו-B.
נניח ש-S מכיל לא יותר מאשר 98 קודקודים. אז ניקח שני קודקודים כלשהם X, Y מחוץ ל-S. נתבונן ברביעיית נקודות A, B, X, Y. אם A או B מקושר ל-X או ל-Y אז ניתן להאריך את המסלול S. לכן נשאר המקרה ש-A מקושר ל-B (כלומר S ניתן להשלים למעגל), ו-X מקושר ל-Y. ובכן, כל שני קודקודים מחוץ ל-S מקושרים. גם כל שני קודקודים בתוך S מקושרים, אכן, אם C, D שני קודקודים כלשהם מתוך S ו-X, Y שני קודקודים מחוץ ל-S, לאו דווקא סמוכים, ואם בנוסף C או D מחובר ל-X או ל-Y, למשל C מחובר ל-X, אז ניתן להפוך את S למעגל, להפריד את C מאחד השכנים שלו ולקשר אותו ל-X, וכך נאריך את S ב-1. לכן C ו-D לא מקושרים ל-X ו-Y, אבל ברביעייה זו יש שני קשרים, לכן X מקודר ל-Y ו-C מקושר ל-D. במילים אחרות, כל שני קודקודים ב-S מקושרים, וכל שני קודקודים לא ב-S מקושרים. אם ניקח קודקוד אחד ב-S וקודקוד אחד לא ב-S, כל קודקוד אחר מקושר לאחד מהם.

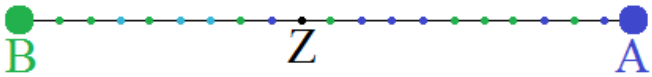
נניח כעת, שהמסלול S באורך 99. יש קודקוד יחיד E שנמצא מחוץ ל-S. אם E מחובר ל-A או ל-B אז אפשר להאריך את S, וזה לא המצב. אם A מחובר ל-B, ואם E מחובר ל-F כלשהו במסלול, אז אפשר להפוך את המסלול למעגל, לחתוך אותו ליד F ולחבר את F ל-E וכך להאריך את המסלול. לכן אם A מחובר ל-B, אז E מופרד מכל קודקודי S.
במקרה זה נחפש ב-S קודקוד V, שלא מקושר לשני קודקודים U ו-W. אם יש כזאת, אז רביעייה U, V, W, E עלולה להכיל רק קשר אחד UW, וזה רק קשר אחד בניגוד לתנאי. לכן קודקוד V לא קיים, ולכן לכל קודקוד ב-S יכול להיות רק קודקוד אחד שלא מחובר אליו. אבל 99 קודקודים לא ניתן לחלק לזוגות, לכן יש ב-S קודקוד M שמחובר לכולם, אז M ו-E זה הזוג שחיפשנו.
נניח כעת ש-A ו-B לא מחוברים, וכמובן גם E לא מחובר ל-A ו-B. לכן לכל קודקוד P הרביעייה A, B, P, E מכילה רק קשרים של P עם עוד קודקוד. לכן כל קודקוד P חוץ מ-A, B, E מחובר לשניים מבין A, B, E. נניח שיש קודקוד P שמחובר ל-E. לידו במסלול S יש קודקוד Q שגם הוא לא קצה של מסלול. אם Q מחובר ל-E גם, אז אפשר להכניס את E למסלול בין P ל-Q, ואז המסלול הוא לא הארוך ביותר. אם לא, אז Q מחובר ל-A ול-B בו-זמנית. אז נחתוך את המסלול לשני חלקים בין P ל-Q, נחבר את S ל-P ואת הקצה ההפוך של החלק של המסלול שמסתיים ב-P (לא משנה אם זה A או B) נחבר ל-Q. נקבל מסלול יותר ארוך מ-S, בגודל 100.

ובכן, נניח שיש מסלול $A_1A_2A_3...A_{100}$ שבעצם עובר על כל הקודקודים.

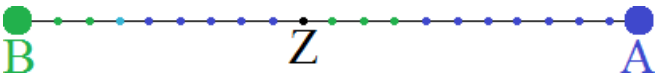
לפי הנתון, $A=A_1$ לא מקושר ל-$B=A_{100}$. יתכן שהזוג A, B זה הזוג שעונה על הדרישות. אם לא, אז קיים קודקוד A_k, כאשר $1<k<100$ שלא מחובר ל-A ולא ל-B. אם יש שני קודקודים כאלה, A_j, A_k אז ברביעייה A, B, A_k, A_j יש רק קשת אחד בניגוד לנתון. לכן k מוגדר ביחידות, ונסמן $Z=A_k$.

בשלישיה A, B, Z אין קשרים, ולכן כל קודקוד נוסף P מקושר לשניים מהם.

כעת נצבע את כל הקודקודים במסלול בכחול ו\או ירוק. את A והקודקודים שמקושרים אליו נצבע בכחול, ואת B והקודקודים שמקושרים אליו נצבע בירוק. קודקודים שלא ירוקים ולא כחולים יישארו בצבע שחור (אנחנו מניחים שיש בדיוק אחד כזה, אחרת סיימנו), ויתכן שיהיו גם קודקודים שנצבעו בירוק וגם בכחול, כלומר הם בצבע תכלת. (בתרשים המסלול מסודר מימין לשמאל, התרשים הוא להמחשה בלבד, בציור האמיתי 100 קודקודים).

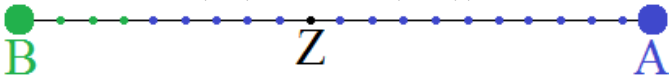


אם קודקוד A_i נצבע בירוק, ו-A_{i+1} בכחול, אז ניתן להפוך את קטע המסלול $A_1,...,A_i$, ואת המסלול שמתקבל יהיה אפשר לסגור למעגל, בניגוד לנתון. טיעון רלוונטי גם למקרה שאחד הקודקודי A_i, A_{i+1} תכלת, או אפילו שניהם. לכן בכל אחד מהקטעים AZ ו-ZB של המסלול, כל הנקודות הכחולות בהתחלה, וכל הנקודות הירוקות בסוף, ויש נקודת תכלת אחת לכל היותר בכל אחד מהקטעים. לכן במסלול יש לכל היותר 2 נקודות שמקושרות ל-A ול-B בו-זמנית, והרי Z מקושר לכל הנקודות האחרות, לכן הדרגה של Z היא לפחות 95.סכום הדרגת של A ו-B בין 97 ל-99, הרי הם מקודרים לכל 97 הקודקודים שאינם A, B, Z ויש לכל היותר 2 משותפים.



אם יש בדיוק קודקוד אחד בצבע תכלת, אז ביחד עם Z הם מקושרים לכולם, הרי הקודקוד הזה מקושר ל-A ו-B, ו-Z לכל האחרים.

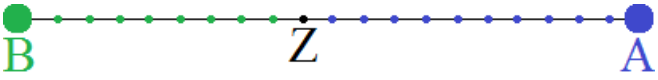
נניח שיש שני קודקודי תחלת, אחד בקטע AZ של המסלול ואחד בקטע BZ. לה"כ הדרגה של A לפחות 48. הקודקוד A_{k-1} הוא תכלת או ירוק. ניתן להפוך את קטע המסלול BZ (כלומר $A_k,A_{k+1},...,A_{100}$), הרי B מקושר ל-A_{k-1}. אז נקבל מסלול שסכום הדרגות של הקצוות 140 לפחות, ומקרה זה כבר פתרנו. ובכן, ניתן להניח שאין נקודות תכלת.



אז סכום הדרגות של A ו-B היא 97 בדיוק.

כמו כן ניתן להניח שהדרגה של A היא 48 לפחות, ושהקודקוד A_{k-1} הוא כחול, כי אחרת נוכל לעשות את אותו הטריק של להפוך את הקטע BZ. כמובן אז גם כל הקודקודים $A_2,A_3,...,A_{k-1}$ כחולים.

אם A_{k+1} כחול, ניתן לעשות את אותו הטריק בכיוון הפוך: לסדר את $A_1,A_2,...,A_k$ בסדר הפוך, ואז Z מגיע לקצה, וסכום דרגות הקצוות לפחות 98 ואז סיימנו. לכן $A_{k+1},...,A_{99}$ כולם ירוקים.



ניתן להפוך בין A ל-A_2, ושוב נקבל מסלול. לאחר השינוי צריכים לקבל אותו סוג של צביעה (כלומר ירוקים ברצף, שחור אחד, וכחולים ברצף), אחרת סיימנו. מצד שני הירוקים הם אותם הירוקים, הרי B הוא אותו B. לכן גם הכחולים הם אותם הכחולים, ואבל זה לא נכון, כי A_2 מקושר ל-Z. סתירה.

6*. בקבוצה של אנשים תת-קבוצה נקראת **קליקה** אם כל שניים בקבוצה מכירים זה את זה. נניח שנתונה קבוצה של אנשים, שבה הקליקה המקסימלית היא בגודל זוגי. הראו, שניתן לחלק את האנשים האלה לשתי מחלקות, כך שהקליקות המקסימליות בשתי המחלקות תהיינה באותו גודל.

פתרון. נבחר קליקה מכסימלית K, שגודלה $2n$. בהתחלה נרשום את כל אנשים K במחלקה ראשונה, ואת האנשים האחרים במחלקה השנייה. כאת קליקה מכסימלית במחלקה ראשונה גדולה או שווה לקליקה המכסימלית במחלקה השנייה.
כעת נעביר אנשים אחד-אחד מהמחלקה ראשונה למחלקה שנייה. בכל מהלך כזה, במחלקה ראשונה הקליקה המכסימלית תצטמצם ב-1, ובמחלקה השנייה הקליקה המכסימלית יכולה לגדול ב-1 לכל היותר. לכן הפרש בין גודל של הקליקה המכסימלית של מחלקה ראשונה לקליקה המכסימלית של המחלקה השנייה יורד בכל מהלך ב-1 או ב-2. בהתחלה ההפרש הזה אי-שלילי, ובסוף שלילי, לכן בשלב מסוים הוא יגיע ל-0 או ל--1, וברגע זה נעצור את התהליך. אם ההפרש שווה ל-0, סיימנו. אז מעכשיו נניח שההפרש שווה -1, כלומר כמות האנשים שנשארו במחלקה הראשונה קטנה ב-1 מהקליקה המכסימלית במחלקה השנייה. אז כרגע במחלקה ראשונה יש ℓ אנשים שיוצרים קליקה, ובמחלקה השנייה יש קליקות של $\ell+1$ אנשים.
נסמן ב-L את קבוצת כל האנשים שנשארו במחלקה ראשונה, וב-M את קבוצת כל האנשים שעברו ממחלקה ראשונה למחלקה שנייה.
אפשר לנסות להחזיר את אחד מאנשי M למחלקה ראשונה. זה יגדיל את הקליקה המכסימלית של המחלקה הראשונה ב-1. זה עלול להקטין את הקליקה המכסימלית של המחלקה השנייה, אבל אם לא אז נוכל לגרום למצב שבשני המחלקות הקליקות המכסימליות באותו גודל.
לכן מעכשיו נניח, ש-M מוכל באופן מלא בכל הקליקות המכסימליות של המחלקה השנייה. ניקח אדם במחלקה שנייה שהוא לא ב-K, שמשתתף בקליקה בגודל $\ell+1$.
נשים לב שבמחלקה שנייה יש קליקה M בגודל $2n-\ell$, ולכן $2n-\ell\le\ell+1$, כלומר $2n\le 2\ell+1$, אבל מספר אי-זוגי לא שווה למספר זוגי, לכן בשני אי-שוויונים אלה אפשר להחליף את "$\le$" ב-"$<$". לכן בכל קליקה מכסימלית במחלקה שנייה אפשר למצוא מישהו שאינו ב-M.
נעביר אחד-אחד אנשים ממחלקה שנייה למחלקה ראשונה: כל פעם נבחר מישהו שהוא שותף לקליקה בגודל $\ell+1$ במחלקה שנייה, שאינו ב-M, נעביר אותו למחלקה ראשונה. כך נעשה עד שלא נפרק את כל הקליקות בגודל ℓ.
בסוף התהליך במחלקה השנייה הקליקה המכסימלית היא בגודל ℓ. גם במחלקה ראשונה יש קליקה בגודל ℓ (למשל L), אבל יתכן שיש שם אפילו קליקה יותר גדולה כי הוספנו אנשים.
אנחנו טוענים שזה לא נכון, כלומר שגם בסוף במחלקה ראשונה אין אף קליקה בגודל $\ell+1$, וזה יסיים את הפתרון.
אכן, במחלקה ראשונה יש אנשים מ-L ואנשים שהועברו ממחלקה שנייה, שהשתייכו שם לקליקות בגודל $\ell+1$ הכילו את M. לכן כל איש במחלקה ראשונה משתייך לקליקה שמכילה את M. לכן אם יש במחלקה ראשונה קליקה בגודל $\ell+1$ אז אפשר לאחד אותה אם M שהיא בגודל $2n-\ell$, ולקבל קליקה בגודל $2n+1$, וזו סתירה.