תרגיל 6

בפתרון אנחנו נשתמש מספר פעמים בסימונים של **זוויות מכוונות**, על מנת לחסוך בדיקת מקרים. בהינתן ישרים ℓ_1,ℓ_2 הזוויות $\sphericalangle(\ell_1,\ell_2)$ זה הזוויות בה צריך לסובב את הישר ℓ_1 נגד כיוון השעון על מנת לקבל ישר שמקביל ל-ℓ_2. כמובן, הזוויות המכוונות מוגדרות מודולו π (או מודולו 180°).
שימוש בזוויות מכוונות חוסך המון בדיקת מקרים. למשל, התנאי לכך ש-4 נקודות שונות A, B, C, D נמצאות על מעגל אחד הוא $\sphericalangle(AB,BC)=\sphericalangle(AD,DC)$, ובזוויות רגילות יש שתי נוסחאות שונות, תלוי האם D, B נמצאים באותו צד של AC או בצדדים שונים. דוגמה נוספת: $\sphericalangle(\ell_1,\ell_2)+\sphericalangle(\ell_2,\ell_3)=\sphericalangle(\ell_1,\ell_3)$, לא משנה באיזה סדר מסודרים הישרים.

1. א. נקודות K, L, M נמצאות על הצלעות BC, AC, AB בהתאמה של המשולש ABC (אבל לא בקודקודים). הוכיחו כי המעגלים החוסמים של ALM, BKM, CKL נפגשים בנקודה אחת. (טענה זאת לפעמים נקראת משפט מיקל).
ב. נתונים 4 ישרים במישור, שנחתכים ב-6 נקודות שונות. הראו שהמעגלים החוסמים את 4 המשולשים, שנוצרים על ידי שלשות של הישרים הנתונים, נפגשים בנקודה אחת (הנקודה הזאת נקראת נקודת מיקל).

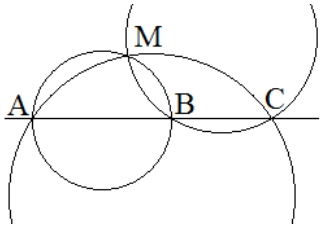
פתרון. א. בזוויות מכוונות המעגלים הם
$$\sphericalangle(XL,XM)=180^\circ-\sphericalangle(AM,AL)=180^\circ-\sphericalangle A,$$
$$\sphericalangle(XM,XK)=180^\circ-\sphericalangle(BK,BM)=180^\circ-\sphericalangle B,$$
$$\sphericalangle(XK,XL)=180^\circ-\sphericalangle(CL,CK)=180^\circ-\sphericalangle C.$$
סכום המשוואות זו משוואה שתמיד נכונה: $360^\circ=360^\circ$.
לכן כל שתי משוואות גוררות את המשוואה האחרת, ולכן המעגלים נפגשים בנקודה אחת.

ב. נניח ששלוש מבין הישרים נפגשים בנקודות A, B, C והישר הרביעי פוגש את הישרים AB, AC, BC בנקודות K, L, M בהתאמה. המעגלים ALM, BKM נפגשים בנקודה N ובנקודה נוספת M, שהיא לפי הסעיף הקודם נמצאת גם על המעגל CKL. כן הוכחנו שכבר 3 מעגלים נפגשים בנקודה אחת. באותה צורה מוכיחים שגם המעגלים ALM, ABC, BKM נפגשים ב-N. לכן כל 4 המעגלים נפגשים ב-N.

2. נתונים 4 ישרים במישור, שנחתכים ב-6 נקודות שונות. הראו שמרכזי המעגלים החוסמים את 4 המשולשים, שנוצרים על ישי שלשות של הישרים הנתונים, ונקודת מיקל שהוגדרה בסעיף ב' של השאלה הקודמת, נמצאים על מעגל אחד.

פתרון. מספיק להראות שנקודת מיקל, שתסומן M, נמצאת על מעגל אחד עם כל 3 מבין המרכזים. נבחר 3 מעגלים – שלושתם עוברים דרך M, ודרך עוד נקודות. קיים ישר שעליו יש 3 נקודות מפגש עם הישרים האחרים A, B, C (לה"כ בסדר זה), כך שהמעגלים הם המעגלים החוסמים של ABM, ACM, BCM.

ובכן, בשאלה זאת מספיק להתבונן רק בישר אחד מבין ה-4 ושלוש נקודות עליו.
נסמן את המרכזים של ABM, ACM, BCM באמצעות W, V, U בהתאמה. צריך להראות ש-UVWM חסום. מצד אחד



$$\sphericalangle(UV,UW)=\sphericalangle(MC,MB),$$

הרי UV הוא האנך האמצעי של MC, UW הוא האנך האמצעי של MB.
מצד שני

$$\sphericalangle(MV,MW)=\sphericalangle(MA,MW)-\sphericalangle(MA,MV)=$$
$$=\left(90^\circ-\sphericalangle(MB,AB)\right)-\left(90^\circ-\sphericalangle(MC,AC)\right)=$$
$$=\sphericalangle(MC,AC)-\sphericalangle(MB,AC)=\sphericalangle(MC,MB)$$

לכן $\sphericalangle(UV,UW)=\sphericalangle(MC,MB)=\sphericalangle(MV,MW)$, לכן U, V, W, M על מעגל אחד, מש"ל.

הערה. מפתה לעשות אינברסיה אם מרכז ב-M. קודם נגדיר נקודות K, L, N שמנוגדות ל-M על המעגלים, כלומר U, V, W הם האמצעים של MK, ML, MN בהתאמה. מספיק להוכיח כי M, K, L, N על מעגל אחד.
המשולשים KMB, KMC, NMA, NMB, LMA, LMC ישרי זווית עם זוויות ישרות בנקודות N, L, K. לאחר אינברסיה שמרכזה M נקבל נקודות A', B', C', K', L', M'. המשולשים K'MB', K'MC', ... גם ישרי זווית עם הזוויות הישרות ב-A', B', C'. לכן בתמונה החדשה הנקודות N', L', K' הם עקבי האנכים מ-M לצלעות המשולש A'B'C'. וצריך להוכיח כי N', L', K' על ישר אחד. שזה בדיוק שאלה 3.

3. על המעגל החוסם של משולש ABC נבחרה נקודה P. עקבי האנכים מ-P לישרי צלעות המשולש הם K, L, M.
א. הוכיחו כי K, L, M נמצאים על ישר אחד (הישר של סימסון).
ב. נסמן ב-H את נקודת מפגש הגבהים של ABC. הראו שהישר KLM עובר דרך אמצע הקטע PH.

פתרון. א. לה"כ K על BC, L על AC, M על AB.
המעגל שקוטרו AP עובר דרך נקודות M ו-L, המעגל שקוטרו BP עובר דרך נקודות K ו-M, המעגל שקוטרו CP עובר דרך נקודות K ו-L. לכן יש 4 רביעיות נקודות שהן על מעגל אחד: ABCP לפי נתון, וגם APLM, BPKM, CPKL. מכאן נעשה חשבון בזוויות מכוונות, על מנת להוכיח כי M, L, K על ישר אחד:
נשים לב כי $\sphericalangle(PB,PC)=\sphericalangle(AB,AC)=\sphericalangle(AM,AL)=\sphericalangle(PM,PL)$.
לכן $\sphericalangle(PB,PM)-\sphericalangle(PC,PL)=\sphericalangle(PB,PC)-\sphericalangle(PM,PL)=0$.
לכן $\sphericalangle(KC,KL)=\sphericalangle(PC,PL)=\sphericalangle(PB,PM)=\sphericalangle(KB,KM)$.
ובכן, KM ו-KL יוצרים אותה זווית מכוונת עם הישר KBC, לכן זה בעצם אותו הישר.

ב. ננסח את הטענה מחדש. נרחיק את 3 הנקודות K, L, M פי 2 מ-P. נקבל נקודות K', L', M' כך שהנקודות K, L, M הם אמצעי PK', PL', PM'. בעצם, K', L', M' הם

שיקופים של P ביחס לצלעות. כמובן ש-K', L', M' נמצאות על ישר אחד - זה שקול לסעיף הקודם. הישר של שיקופים נקרא הישר של שטיינר. אנחנו טוענים בנוסף, שהישר K'L'M' עובר דרך H. קל לראות שזה שקול לטענה של הסעיף הזה.

ננסה לשים את העגלה לפני הסוס. נעביר ישר ℓ כלשהו דרך H, ונשקף אותו ביחס ל-3 הצלעות. נסמן ב-ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c את הישרים שמתקבלים על ידי שיקוף של ℓ ביחס לישרים AB, CA, BC בהתאמה.

שיקופים של H ביחס לצלעות של המשולש AB, CA, BC בהתאמה יסומנו H_1, H_2, H_3. קל לראות כי $\sphericalangle(H_1B,H_1C)=\sphericalangle(HC,HB)=\sphericalangle(AB,AC)$ (הרי כשמחליפים כל צלע בגובה מתאים, מתבצע סיבוב של שני הישרים ב-90° והזווית לא משתנה) לכן H_1 על המעגל החוסם של ABC וכך גם H_3 ו-H_3. לכן היינו יכולים להגדיר את H_1, H_2, H_3 בתור נקודות מפגש הנוספות של הישרים CH, BH, AH עם המעגל החוסם (לפחות למשולש שאינו ישר זווית).

משפט. הישרים ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c נפגשים בנקודה אחת, שנמצאת על המעגל החוסם של ABC.
גם להפך: אם ניקח נקודה D על המעגל, ונעביר את הישרים DH_1, DH_2, DH_3, אז ישרים אלה הם שיקופים של ישר מסוים, שעובר דרך H, ביחס לצלעות BC, AC, AB בהתאמה. (במקרה ש-D מתלכד אם H_i, הישר DH_i מוגדר להיות המשיק למעגל ב-D.)

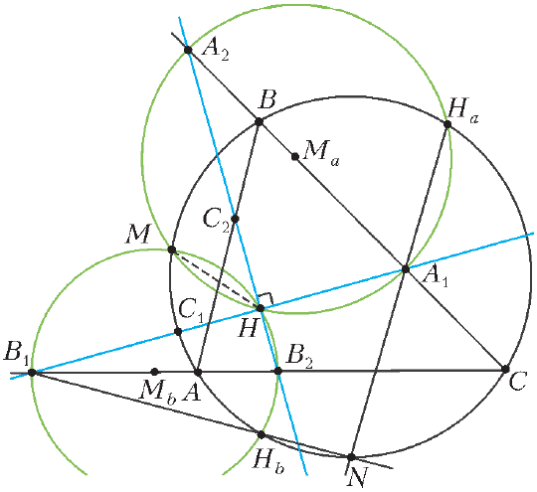
כמובן, שני הכיוונים של המשפט שקולים. למשל אם נבחר נקודה D, אז השיקוף ביחס ל-BC של DH_1 ייתן ישר דרך H, והשיקופים של הישר דרך H ביחס לשני צלעות האחרות ייתנו את DH_2, DH_3 באופן אוטומטי, אם אנחנו כבר יודעים שהם נפגשים על המעגל. גם הגרירה בכיוון ההפוך קלה באותה מידה.

כדאי להתבונן במקרה $D=A$. במקרה זה הישרים DH_1, DH_2, DH_3 הם בעצם AH, AH_2, AH_3. שיקוף בהתאמה לגבי צלעות BC, AC, AB נותן בכל פעם את ישר הגובה AH, שזה כמובן ישר מסוים שעובר דרך O.
נניח כי הישר ℓ מסובב ביחס לישר AH בזווית ϕ אם כיוון השעון. אז הישרים ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 עוברים דרך H_1, H_2, H_3 בהתאמה, מסובבים בזווית ϕ נגד כיוון השעון ביחס ל-AH_1, AH_2, AH_3 בהתאמה. לכן הנקודות חיתוך הנוספות של ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 עם המעגל החוסם (שהן לא H_1, H_2, H_3 בהתאמה) מוזזות ביחס ל-A נגד כיוון השעון בקשת 2ϕ. לכן שלוש נקודות אלו זו אותה נקודה. זה משלים את הוכחת המשפט.
מהמשפט הטענה שצריך להוכיח די ברורה.
הערה. מהמשפט שניסחנו קל לקבל מסקנה מעניינת:
מסקנה. אם הישרים שמתקבלים ע"י שיקוף של ישר ℓ ביחס לצלעות משולש ABC, יוצרים משולש. אז מרכז המעגל החסום שלו נמצא על המעגל החוסם של משולש ABC.
אכן, אם מזיזים את ℓ במקביל, ללא סיבוב, אז השיקופים זזים באותו מרחק מרכז המעגל החסום. ניתן להזיז את ℓ כך שיעבור דרך H, ואז המסקנה ברורה מהמשפט.

4. א. ABCD – מרובע חסום, ונקודה P נמצאת על המעגל החוסם שלו. נקודה P מגדירה ישרי סימסון עבור משולשים ABC, ABD, ACD, BCD. הראו ההיטלים של P על 4 ישרים אלה נמצאות על ישר אחד (ישר סימסון של מרובע).
ב. נסחו והוכיחו את קיום ישר סימסון גם עבור מחומש חסום.
פתרון. א. נסמן ב-B_1, C_1, D_1 את ההיטלים של P לישרים AB, AC, AD בהתאמה. המעגל שקוטרו AP עובר גם דרך הנקודות B_1, C_1, D_1. הישרים C_1D_1, B_1D_1, B_1C_1 הם ישרי סימסון של המשולשים ACD, ABD, BCD ביחס לנקודה P. ההיטלים של P על הישרים C_1D_1, B_1D_1, B_1C_1 יוצרים ישר אחד, הרי זה ישר סימסון של המשולש $B_1C_1D_1$ ביחס לנקודה P.
כמובן, היינו צריך להראות ש-4 נקודות על ישר אחד ולא 3, אבל לכל 3 מבין 4 הנקודות עובדת הוכחה דומה.

ב. נניח שיש לנו נקודה P ונקודות $A_1,...,A_n$, שכולן על אותו מעגל. נניח שכבר הגדרנו ישר של סימסון עבור $n-1$ נקודות, ואז אם מדלגים על נקודה A_i מקבלים ישר של סימסון ℓ_i. אז ההיטלים של P על ℓ_i נמצאים על ישר אחד, שיקרא הישר של סימסון של המצולע $A_1...A_n$ ביחס ל-P. ההוכחה די דומה להוכחה של הסעיף הקודם.

5. דרך נקודת מפגש הגבהים של משולש ABC מעבירים שני ישרים שמאונכים זה לזה. הישרים האלה פוגשים את הישר AB בנקודות C_1, C_2, את הישר AC בנקודות B_1, B_2 ואת הישר BC בנקודות A_1, A_2. הראו שאמצעי הקטעים A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 נמצאים על ישר אחד.



הערה. טענה זו נקראת משפט דרוז-פארני (Droz-Farny).

פתרון. כרגיל, מפגש הגבהים יסומן H.
נניח שהנקודות A_1, B_1, C_1 על ישר אחד דרך H, והנקודות A_2, B_2, C_2 על הישר השני. יהיו M_a, M_b, M_c את אמצעי הקטעים A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. השיקופים של H ביחס לצלעות המשולש BC, AC, AB יסומנו H_a, H_b, H_c בהתאמה.
הנקודות M_a, M_b, M_c הם המרכזים של המעגלים HA_1A_2, HB_1B_2, HC_1C_2. כל המעגלים האלה עוברים דרך H. אם נוכיח שקיימת נקודה נוספת M דרכה עוברים 3 המעגלים, נסיים בזה את ההוכחה, הרי אז מרכזי המעגלים כולם נמצאים על האנך האמצעי של MH.
לפי המשפט שנוסח והוכח בהוכחה של סעיף ב', שאלה 3, השיקופים של הישר $A_1B_1C_1H$ ביחס לצלעות של ABC נפגשים בנקודה על המעגל ABC, שתסומן N. השיקופים הם בעצם NH_a, NH_b, NH_c.

כעת נשתמש במשפט מיקל (סעיף 1, שאלה 1) עבור המשולש NA_1B_1 ונקודות על צלעותיו H, H_a, H_b: המעגלים HA_1A_2, HB_1B_2 נפגשים בנקודה M (בנוסף על H) שנמצאת גם על מעגל ABC. באותה צורה מוכיחים שגם HC_1C_2 עוברת באותה נקודה.

הערה. הפתרון מתוך המאמר של שבצוב (ברוסית) שבו יש עוד מספר שאלות שקשורות למשפטי מיקל וישרי סימסון: http://geometry.ru/persons/shvetsov/dr-fr.pdf .

6*. משולש חד-זוויות ABC חסום במעגל Γ, שמשיק לישר ℓ. נסמן ב- ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c את הישרים שמתקבלים על ידי שיקוף של ℓ ביחס לישרים AB, CA, BC בהתאמה. הוכח כי המעגל החוסם של המשולש שנוצר על ידי הישרים ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c משיק למעגל Γ.

הערה. זאת הייתה השאלה הקשה ביותר שהוצעה לאולימפיאדה הבינלאומית ב-2011. השאלה הוצעה על ידי יפן. המתחרים הישראלים צברו 0 נקודות בסה"כ בשאלה זאת. לא באמת צריך שהמשולש ABC יהיה חד-זוויות, אבל לא היה רצון לאף אחד להוריד נקודות על דברים לא מהותיים.

בכל הפתרונות נשתמש בסימונים הבאים: T היא נקודת ההשקה של Γ ו- ℓ, נקודת מפגש של ℓ_a ו- ℓ_b היא C', נקודת מפגש של ℓ_a ו- ℓ_c היא B', נקודת מפגש של ℓ_a ו- ℓ_b היא A'.

פתרון ראשון. כאשר יש שני מעגלים שמשיקים זה לזה, אז הם הומותטיים והמרכז של הומותטיה הוא נקודת ההשקה.

נמצא נקודה "A על Γ השונה מ-T (כל עוד זה אפשרי), כך ש "AT = AA. כלומר A היא אמצע הקשת "TA. באופן דומה נגדיר את "B ואת "C. מחשבון זוויות פשוט רואים, כי $\sphericalangle(AB,\ell)=\sphericalangle(A"B",AB)$. לכן "A"B מקביל ל-A'B', ובכלל, הצלעות המתאימות של "A"B"C מקבילות לצלעות המתאימות של A'B'C'. לכן המשולשים A'B'C' ו-"A"B"C הם הומותטיים זה לזה, או שאחד הוא הזזה של השני. למטרות שלנו מספיק להוכיח שזו אכן הומותטיה ולא הזזה, ושמרכז הומותטיה הוא על המעגל Γ.

טענה 1. נקודת המפגש X של הישרים B"C ו-C"B נמצאת על ℓ_a.

אכן, $\sphericalangle XBC=\sphericalangle CBT$ וגם $\sphericalangle XCB=\sphericalangle BCT$, הרי זוויות שוות נשענות על קשתות שוות. לכן X סימטרי ל-T ביחס ל-BC. אבל T נמצא על ℓ, לכן X על ℓ_a לפי ההגדרה של ℓ_a.

טענה 2. הישרים BB', CC' נפגשים בנקודה I שנמצאת על Γ.

הוכחה. נתייחס למקרה שהישר ℓ אינו מקביל לצלעות ABC (את המקרים האחרים אפשר לקבל כגבול). נקודות החיתוך של ℓ אם הצלעות AB, AC, BC בהתרמה יסומנו D, E, F. הישר BD חוצה את הזווית בין הישרים $\ell=DF$ ל-$\ell_a=DB'$, כמו כן, BF חוצה את הזווית בין DF ו-B'F. לכן B הוא מרכז של מעגל חסום (מבפנים או מבחוץ) של המשולש B'DF. בכל מקרה $\sphericalangle(BD,DF)+\sphericalangle(DF,FB)+\sphericalangle(BB',B'D)=90^\circ$.

$$\sphericalangle(B'B,B'C')=\sphericalangle(B'B,B'D)=90^\circ-\sphericalangle(BC,DF)-\sphericalangle(DF,BA)=$$
$$=90^\circ-\sphericalangle(BC,BA)$$
בדומה מראים כי $\sphericalangle(C'C,B'C')=90^\circ-\sphericalangle(BC,AC)$. ולכן
$$\sphericalangle(BI,CI)=\sphericalangle(B'B,B'C')+\sphericalangle(B'C',C'C)=\sphericalangle(BC,AC)-\sphericalangle(BC,AB)=$$
$$=\sphericalangle(AB,AC)$$
כלומר הנקודות A, B, C, I על מעגל אחד. מש"ל בטענה 2.

כעת נסיים את פתרון השאלה. יהי K נקודת החיתוך הנוספת של "B'B ושל Γ. משפט פסקל עבור המשושה "KB"CIBC, המשושה שחסום ב-Γ, אומר כי X (מפגש של B"C עם "BC), B' (מפגש של "KB עם IB) ונקודה נוספת שהיא מפגש של CI עם "KC, נמצאות על ישר אחד. הישר הזה BX הוא בעצם ℓ_a. ובכן CI, ℓ_a, "KC נפגשים בנקודה אחת. אבל CI עובר דרך C' (לפי הגדרת I), וגם ℓ_a.
ובכן K, C', "C נמצאים על ישר אחד. באופן דומה גם K, B', "B. לכן הומותטיה עם מרכז ב-K תעביר A'B'C' ל-"A"B"C.

פתרון שני. יהיו X, Y, Z השיקופים של T ביחס לצלעות BC, AC, AB בהתאמה. הנקודות X, Y, Z נמצאות על ישר אחד (כמו שהוסבר בשאלה 3), ונמצאות על הישרים ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c בהתאמה. נקודת מיקל (שאלה 1 סעיף ב) של רביעיית הישרים ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c, XYZ תסומן K (ולא במקרה).
נשים לב כי עקב סימטריה ביחס לישרים AC ו-BC
$$\sphericalangle(XC,XC')=\sphericalangle(\ell,TC)=\sphericalangle(YC,YC')$$
לכן הנקודות C, C', X, Y על מעגל אחד שיסומן Γ_c. באופן דומה נגדיר גם מעגלים Γ_a,Γ_b. נסמן ב-Γ' את המעגל החוסם של A'B'C'. אז נקודה K לפי הגדרתה היא נקודה משותפת למעגלי $\Gamma',\Gamma_a,\Gamma_b,\Gamma_c$. מספיק להראות, כי K נמצאת גם על Γ, ושהמשיקים ב-K ל-Γ ול-Γ' מתלכדים.
בציור יש המון מעגלים, לכן ניתן להוכיח הרבה באמצעות חשבון זוויות.
עקב סימטריה, $BZ=BT=BX$, לכן הנקודה B חוצה את הקשת XZ על המעגל Γ_b.
לכן $\sphericalangle(KB,KX)=\sphericalangle(XZ,XB)$. באופן דומה, $\sphericalangle(XC,XY)=\sphericalangle(KX,KC)$. אז
$$\sphericalangle(KB,KC)=\sphericalangle(KB,KX)+\sphericalangle(KX,KC)=\sphericalangle(XZ,XB)+\sphericalangle(XC,XZ)=$$
$$=\sphericalangle(XC,XB)=\sphericalangle(TB,TC)$$
ובכן, K נמצאת על המעגל TBC, שזה Γ.
נסמן ב-k את המשיק ל-Γ ב-K. אז
$$\sphericalangle(k,KC')=\sphericalangle(k,KC)+\sphericalangle(KC,KC')=\sphericalangle(KB,BC)+\sphericalangle(XC,XC')=$$
$$=\left(\sphericalangle(KB,BX)-\sphericalangle(BC,BX)\right)+\sphericalangle(\ell,CT)=$$
$$=\sphericalangle(KB',B'X)-\sphericalangle(BT,BC)+\sphericalangle(BT,BC)=\sphericalangle(KB',B'C')$$
לכן k משיק ל-Γ', מש"ל.

פתרון שלישי. יש פתרון שהוא חישוב עם מספרים מרוכבים. אנחנו נשאיר פרטי חישוב כתרגיל לקוראים שאוהבים לפתור שאלות בגיאומטריה אנליטית. כל נקודה נגדיר מספר מרוכב, שיסומן באות מתאים אבל קטן (למשל מספר מרוכב a מתאר את המיקום של נקודה A. לה"כ Γ זה מעגל יחידה שמרכזו 0, ו-$t=1$. כל נקודה M על המשיק מקיימת משוואה $m+\bar{m}=2$.

השיקוף של נקודה M ביחס ל-AB מתואר באמצעות נוסחה $m'=a+b-ab\bar{m}$.

מכאן לא קשה לפתח את המשוואה של ℓ_c: $\overline{ab}\cdot m+ab\cdot\bar{m}=a+b+\overline{a+b}-2$.

רושמים משוואה זו לצד משוואה דומה ל-ℓ_b, ומקבלים נקודת מפגש הישרים A':

$$a'=\frac{bc(a-1)^2}{b+c}+a.$$

לאחר עוד קצת חישובים רואים כי

$$a'-b'=(a^2-b^2)\sigma.$$

כאשר σ הוא ביטוי סימטרי ביחס ל-a,b,c:

$$\sigma=\frac{abc(h-2+\bar{h})}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

כאשר $h=a+b+c$ זו בעצם נקודת מפגש הגבהים. הביטוי σ הוא ממשי: אם α,β,γ הם הארגומנטים של a,b,c בהתאמה (כלומר $a=e^{2\pi i}$) אז הארגומנט של המונה הוא $\alpha+\beta+\gamma$ ושל המחנה הוא $\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{\alpha+\gamma}{2}$. לכן המשולש A'B'C' הומותטי למשולש A"B"C", כאשר $a"=a^2$, $b"=b^2$, $c"=c^2$ (משמעות גיאומטרית של צירוף מקרים זה הוסבר בפתרון הראשון).

נשאר למצוא את מרכז ההומותטיה באמצעות חישוב, ולהראות שהוא על מעגל היחידה.

אחת הדרכים לעשות זאת היא למצוא נקודת מפגש נוספת של A'A" עם מעגל היחידה.

המספר $\frac{k-a^2}{a'-a^2}$ חייב להיות ממשי (צמוד לעצמו), ובנוסף גם $k\cdot\bar{k}=1$.

עם קצת עבודה ניתן לקבל $k=\frac{ab+bc+ca-abc}{a+b+c-1}$. זה ביטוי סימטרי ב-$a,b,c$, לכן גם B'B" וגם C'C" יחתכו את המעגל באותה נקודה.

פתרון רביעי. עוד דרך זה להישתמש במשפט קייסי. אנחנו נשתמש במקרה פרטי שבו 3 מהמעגלים הם נקודות. נתונים מעגל Θ ונקודות A, B, C מבחוץ. המספרים $A\Theta$ מסמן את אורך המשיק מ-A ל-Θ. אז קיים מעגל שעובר דרך A, B, C ומשיק ל-Θ אם ורק אם מבין המספרים $A\Theta\cdot BC$, $B\Theta\cdot AC$, $C\Theta\cdot AB$ אחד הוא הסכום של שני אחרים.

משפט תלמיד הוא מקרה פרטי של משפט קייסי, כאשר רדיוס של Θ הוא 0.

באופן כללי משפט קייסי מדבר על 4 מעגלים שמשיקים למעגל חמישי, אבל הגרסה שניסחנו שתספיק למטרות שלנו.

בעצם, משפט קייסי אומר שאם קיים מעגל נוסף שמשיק לארבע המעגלים, אז מתקיימת הנוסחה $\pm A\Theta\cdot BC\pm B\Theta\cdot AC\pm C\Theta\cdot BC=0$, בהתאם לסדר בו 4 המעגלים משיקים

למעגל החמישי, אבל גם משפט קייסי הפוך, שאם מתקיימת הנוסחה אז קיים המעגל החמישי שמשיק ל-4 המעגלים הנתונים בסדר שמוגדר על ידי סימני הנוסחה.

ננסח מסקנה של משפט תלמי שנצטרך בהמשך:
טענה. נניח שאורכי הצלעות של משולש ABC הם a,b,c (כאשר a מול A, b מול B). בנקודה P על הקשת BC של המעגל החוסם מעבירים משיק, והמרחקים מ-A, B ו-C למשיק הם x, y ו-z בהתאמה. אז $a\sqrt{x}=b\sqrt{y}+c\sqrt{z}$.
הוכחת הטענה. תהיה Q נקודה נגדית ל-P על המעגל החוסם (כלומר PQ קותר). לכל נקודה D על המעגל, יהיה T היטל של D למשיק ב-P. אז $\Delta PQD\sim\Delta QDT$, ולכן $\frac{PQ}{PD}=\frac{PD}{DT}$ ולכן $PD=\sqrt{PQ\cdot DT}$. נשים לב כי DT זה מרחק מ-D למשיק. לכן אם מכפיל בנוסחה שרשמנו את שני האגפים בשורש הקוטר של המעגל, נקבל
$$a\cdot AP=b\cdot BP+c\cdot CP,$$
וזה נכון כי זה משפט תלמי.

כעת נשתדל לפתור את הבעיה באמצעות משפט קייסי הפוך עבור הרביעייה 'A, 'B, 'C, Γ (כלומר להראות, שיש מעגל שעובר דרך 'A, 'B, 'C ומשיק ל-Γ).
הקטעים 'A'B וכדומה קצת קשים לחישוב, אבל היחסים שלהם די פשוטים. אנו יודעים שהישרים 'A'B, 'A'C מתקבלים מאותו הישר ℓ על ידי שיקופים לגבי AB, AC, לכן הזוויות בין הישרים הוא $2\cdot\sphericalangle A$ או $\pi-2\sphericalangle A$, בכל מקרה $B'C'=\delta\cdot\sin(2A)$ כאשר δ הוא קוטר של מעגל 'A'B'C. כמו כן
$$A'C'=\delta\cdot\sin(2B)\ ,\ A'B'=\delta\cdot\sin(2C).$$
כעת נזכר במסקנה בסוף הפתרון לבעיה 3. המרכז I של המעגל החסום של 'A'B'C נמצא על Γ. סיבוב בזווית 2α שמרכזו A מעביר את ℓ_b ל-ℓ_c, לכן גם A נמצא על חוצה הזווית של 'A. לכן חוצה זווית של 'A פוגש את Γ בנקודות A ו-I.
לכן אורך המשיק מ-'A ל-Γ שסומן במשפט קייסי $A'\Gamma$ מקיים נוסחה
$$A'\Gamma^2=A'I\cdot A'A.$$
דבר דומה עבור 'B, 'C. ובכן צריך להראות כי סכום הביטויים
$$\pm\delta\cdot\sin(2A)\cdot\sqrt{A'I\cdot A'A}$$
עבור בחירה מסוימת של סימנים יתאפס.

אם ρ רדיוס המעגל החסום ב-A'B'C, אז קל לראות כי $A'I=\frac{\rho}{\cos\alpha}$, ובדומה ל-'B, 'C. את המרחק מ-'A ל-A ניתן לחשב באמצעות נוסחה דומה, רק שצריך להחליף את ρ במרחק מ-A לישר ℓ_b, או ℓ_c שזה אותו דבר, או ℓ. נסמן את המרחקים מ-A, B, C בהתאמה על ידי x,y,z. אז $A'A=\frac{x}{\cos A}$ (ובדומה גם B'B, C'C), וצריך להראות כי
$$\pm\sin(2A)\cdot\sqrt{\frac{x\cdot\rho}{\cos^2 A}}\pm\sin(2B)\cdot\sqrt{\frac{y\cdot\rho}{\cos^2 B}}\pm\sin(2C)\cdot\sqrt{\frac{z\cdot\rho}{\cos^2 C}}=0$$
לאחר צמצום $\pm\sin(A)\cdot\sqrt{x}\pm\sin(B)\cdot\sqrt{y}\pm\sin(2C)\cdot\sqrt{z}=0$, וזו מסקנה ממשפט תלמי שניסחנו כטענה.