תרגיל 6

1. א. נקודות K, L, M נמצאות על הצלעות BC, AC, AB בהתאמה של המשולש ABC (אבל לא בקודקודים). הוכיחו כי המעגלים החוסמים של ALM, BKM, CKL נפגשים בנקודה אחת. (טענה זאת לפעמים נקראת משפט מיקל).
ב. נתונים 4 ישרים במישור, שנחתכים ב-6 נקודות שונות. הראו שהמעגלים החוסמים את 4 המשולשים, שנוצרים על ידי שלשות של הישרים הנתונים, נפגשים בנקודה אחת (הנקודה הזאת נקראת נקודת מיקל).

2. נתונים 4 ישרים במישור, שנחתכים ב-6 נקודות שונות. הראו שמרכזי המעגלים החוסמים את 4 המשולשים, שנוצרים על ישי שלשות של הישרים הנתונים, ונקודת מיקל שהוגדרה בסעיף ב' של השאלה הקודמת, נמצאים על מעגל אחד.

3. על המעגל החוסם של משולש ABC נבחרה נקודה P. עקבי האנכים מ-P לישרי צלעות המשולש הם K, L, M.
א. הוכיחו כי K, L, M נמצאים על ישר אחד (הישר של סימסון).
ב. נסמן ב-H את נקודת מפגש הגבהים של ABC. הראו שהישר KLM עובר דרך אמצע הקטע PH.

4. א. ABCD – מרובע חסום, ונקודה P נמצאת על המעגל החוסם שלו. נקודה P מגדירה ישרי סימסון עבור משולשים ABC, ABD, ACD, BCD. הראו ההיטלים של P על 4 ישרים אלה נמצאות על ישר אחד (ישר סימסון של מרובע).
ב. נסחו והוכיחו את קיום ישר סימסון גם עבור מחומש חסום.

5. דרך נקודת מפגש הגבהים של משולש ABC מעבירים שני ישרים שמאונכים זה לזה. הישרים האלה פוגשים את הישר AB בנקודות C_1, C_2, את הישר AC בנקודות B_1, B_2 ואת הישר BC בנקודות A_1, A_2. הראו שאמצעי הקטעים A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 נמצאים על ישר אחד.

6*. משולש חד-זוויות ABC חסום במעגל Γ, שמשיק לישר ℓ. נסמן ב-ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c את הישרים שמתקבלים על ידי שיקוף של ℓ ביחס לישרים AB, CA, BC בהתאמה. הוכח כי המעגל החוסם של המשולש שנוצר על ידי הישרים ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c משיק למעגל Γ.