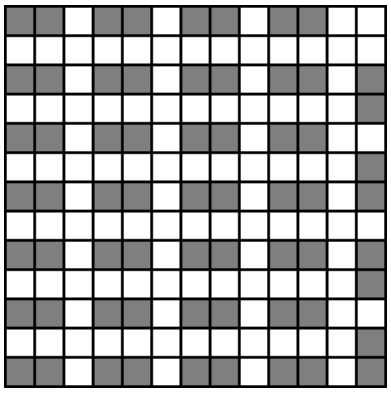
תרגיל 4

1. על לוח משבצות 13×13 רוצים להניח אבני דומינו, כך שכל אבן דומינו תכסה שתי משבצות סמוכות. אסור שהאבנים תגענה זו בזו, אפילו בקודקודים. מהי הכמות המרבית של אבני דומינו שעלולות להיות?

תשובה. 32.

פתרון. נחלק מחשבתית כל משבצת ל-4 משבצות בגודל $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$. עבור כל דומינו נגיד שמשבצת $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ מתייחסת אליו אם היא מכוסה על ידי דומינו, או שנוגעת בדומינו בצלע או בקודקוד. קל לראות, שלדומינו מתייחסים משבצות בגודל $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$, שמכסות מלבן 2×3, ששטחו 6. כמובן יש מצב קצת שונה בקצוות, אבל אם נרחיב את הלוח ב-$\frac{1}{2}$ בכל צד, אז לכל דומינו מתייחס שטח 6. השטחים האלה לא נחתכים: כל משבצת בגודל $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ יכולה להתייחס רק לדומינו אחד, אחרת יהיו דומינו סמוכים. השטח של הלוח לאחר ההרחבה הוא $14\times14=196$. אם יש N דומינו, אז השטחים שמתייחסים לדומינו $6N$, ולכן $6N\le196$ כלומר $N\le32+\frac{4}{6}$.



נשאר לבדוק האם יתכן לקבל $N=32$ ואת זה נעשה באמצעות דוגמה:

2. במשבצות של ריבוע 4×4 רשומים מספרים מ-1 עד 16, כל מספר מופיע פעם אחת בדיוק. ריבוע הוא ריבוע קסם, כלומר סכום המספרים בכל שורה, בכל עמודה ובכל אחד מבין שני האלכסונים של הריבוע יוצא זהה. נתון בנוסף, שהמספרים 1 ו-16 רשומים בפינות נגדיות של הריבוע. הוכיחו, שלכל שני מספרים סימטריים ביחס למרכז הריבוע, סכומם 17.

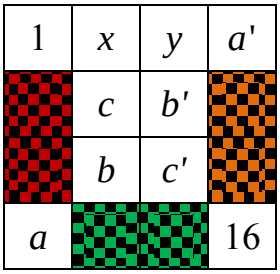
פתרון. סכום כל המספרים הוא $8\cdot(16+1)$. לכן סכום מספרים בכל שורה $2\cdot(16+1)$, וכך גם בכל עמודה ואלכסון. נשים לב שבאחד האלכסונים מופיעים 1 ו-16 בפינות, לכן גם סכום של שני המספרים שהם לא בפינות באלכסון זה שווה 17.

נחסיר סכום של שורה שנייה ושלישית מהסכום של עמודה אחרונה ורביעית. מצד אחד נקבל 0. מצד שני, נקבל סכום כל 4 הפינות פחות סכום כל 4 המשבצות במרכז.

ובכן, סכום 4 הפינות שווה לסכום 4 משבצות המרכזיות. אבל באלכסון שמכיל את 1 ואת 16 כבר ראינו, שסכום קצוות שווה לסכום שתי המשבצות במרכז, לכן זה נכון גם עבור האלכסון האחר. לכן זה נכון גם עבור האלכסון האחר. סכום המספרים בכל אלכסון $2\cdot17$, לכן סכום גם של כל שני פאות נגדיות וגם כל שתי משבצות אלכסוניות על אותו אלכסון הוא 17.

ובכן, הוכחנו שסכום שווה ל-17 עבור פינות סימטריות ומשבצות גע זה נסמן $a'=17-a$, ובדומה $b'=17-b$ וכדומה. אז מה שהוכחנו עד עכשיו ניתן לסכם ע"י ציור (בעמוד הבא), אנחנו מניחים לה"כ ש-1 בפינה שמאלית עליונה (אחרת ניתן להפוך את הלוח).

נסמן את המספרים באמצע של שורה ראשונה בתור x,y (שמאל לימין), וננסה להבין איפה נמצאים x',y'. כמובן, לא יתכן ש-x' או y' נמצא בפינה או במרכז של הלוח, כי אז גם x או y נמצא שם. לא יתכן ש-$y=x'$, הרי אז הסכום בשורה ראשונה שווה $1+7+a$, כלומר $a'=1$, ולכן a' מופיע בשני משבצות שונות.



לא יתכן כי x' נמצא באותה עמודה כמו x, כי אז הסכום באותה עמודה הוא $b+c+17$, ואז $b+c=17$ כלומר $c=b'$ ואז b' מופיע פעמיים. לכן אם x' או y' נמצאים במשבצות הירוקות, אז במקום שסימטרי ל-x או y בהתאמה ביחס למרכז הריבוע.

אם x' נמצא במשבצת ירוקה, אז גם y', הרי אם $1+x+y+a'=17\cdot 2$ לפי שורה ראשונה, ולכן גם $a+y'+x'+16=17\cdot 4-17\cdot 2=17\cdot 2$.

נשאר להוכיח, ש-x' ו-y' לא נמצאים במשבצת אדומה או כתומה.

אם שניהם נמצאים במשבצות אדומות, אז מכיוון שסכום בשורה ראשונה שווה לסכום בעמודה שמאלית, מקבלים $x+y+a'=x'+y'+a$, אבל אז סכום של שני האגפים בזהות האחרונה שווה למספר זוגי, מצד שני זה $17\cdot 3$ שזה מספר אי-זוגי.

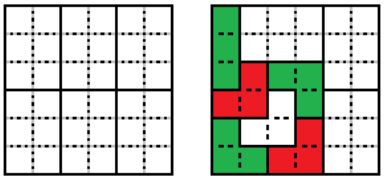
נשאר לפסול מקרה, ש-x' אדום ו-y' כתום, או להפך. נגיד ש-x' אדום. אז לפי סכום של עמודה שמאלית ושורה ראשונה נקבל $x+y+a'+1=1+a+x'+z=2\cdot 17$, כאשר z זה מספר נוסף בעמודה שמאלית.

אם נחבר את שני האגפים נקבל $x+y+z+17+17+2=4\cdot 17$, כלומר $y+z=2\cdot 17-2=32$, אבל $y\le 16$ וגם $z\le 16$ ולא יתכן ש-$y=z=16$, לכן $y+z\le 31$. סתירה.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

המקרה y' נמצא במשבצת אדומה נפתר באופן דומה. בדומה למה שעשינו, מוכיחים כי הטענה נכונה עבור משבצות אדומות (ההוכחה סימטרית ביחס לאלכסון). נציין, שקיימת דוגמה לריבוע קסם שבו 1 ו-16 בפינות מנוגדות (ראה ציור).

3. לוח 6×6 חולק ל-12 צורות, כאשר כל צורה מורכבת מ-3 משבצות. מבין הצורות יש K פינות ⊞ והאחרות הן מלבנים ▭. מצאו את כל הערכים האפשריים של K.



תשובה. 0, 2, וכל מספר $4\le K\le 12$.

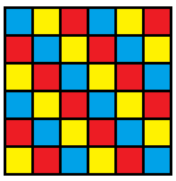
פתרון. ברור ש-K שלם ונמצא בתחום $0\le K\le 12$.

ניתן לחלק את הלוח ל-6 מלבנים 3×2 (הציור השמאלי) וכל מלבן ניתן לחלק לשני לבנים 3×1 או לשתי פינות. בצורה כזאת ניתן לקבל כל K זוגי בתחום.

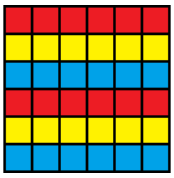
מצד שני ניתן לחלק את הלוח גם ל-5 פינות, מלבן 3×1 ושלושה מלבנים 3×2. כל מלבן ניתן לחלק לשתי פינות או לשני מלבנים, וכך אפשר להגיע לכל K אי-זוגי שהוא לפחות 5 (אבל לא עולה על 11).

נשאר להבין לגבי קיום של K אי-זוגי שקטן מ-5, כלומר 1 או 3.

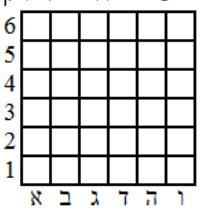
לא יתכן כי K שווה 1. אם יש בציור רק בינה אחת, ניתן להניח לה"כ כי האלכסון שמחבר את שתי קצוות הפינה הוא \ (אחרת נהפוך את הלוח). נצבע את הלוח ב-3 צבעים, בהתאם



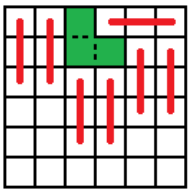
לשארית בחלוקה ל-3 של $x+y$ של המשבצת, כאשר x זה מספר של עמודה, ו-y זה מספר של שורה. אז כל מלבן 3×1 יכיל משבצת אחת מכל צבע, והפינה שאלכסון שלה הוא \ מכיל שתי משבצות מצבע 1 ועוד משבצת מצבע אחר. לכן בצורות של הריצוף לא כל הצבעים יופיעו אותו מספר של פעמים. אבל בלוח כל הצבעים מופיעים אותו מספר של פעמים, בסתירה.
נשאר להבין האם יתכן ש-$K=3$.
נשים לב שפינה שלאכסון שלה הוא / גם מקבלת משבצת אחת מכל צבע. לכן מאותה צביעה רואים כי לא יתכן שיש שתי פינות שאלכסונים שלהם הם / ופינה אחת שאלכסון שלה הוא \. מצביעה סימטרית רואים גם, שלא יתכן כי שתי פינות עם אלכסון \ ופינה אחת עם אלכסון /. לכן אם יש ריצוף, האלכסונים של 3 הפינות הן באותו כיוון.



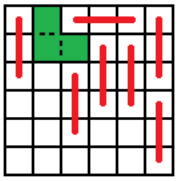
גישה קצת שונה מבוססת על צביעת שורות ב-3 צבעים באופן מחזורי. כל מלבן 3×1 מכסה 3 משבצות באותו צבע או משבצת אחת בכל צבע. כל פינה מכסה 2 משבצות בצבע אחד ומשבצת אחד בצבע אחר. לכן מודולו 3, כמות משבצות בכל צבע שמכוסה על ידי פינות צריך להיות אותו דבר.
מכאן רואים בקלות שפינה אחת לא יכולה להיות, אבל ניתן לקבל מסקנות גם עבור 3 פינות. אם פינה מכוונת למעלה, אז כמויות של משבצות כחולות, צהובות ואדומות אצלע זה $(2,1,0)$ או $(0,2,1)$ או $(1,0,2)$, או מודולו 3 ניתן להגיד שזה תמיד $(2+k,1+k,0+k)$. אם הפינה מכוונת כלפי מטה אז כמויות של משבצות ב-3 הצבעים זה $(2,0,1)$ או $(0,1,2)$ או $(1,2,0)$ כלומר $(0+m,1+m,2+m)$ מודולו 3. לכן אם יש פינה אחת כלפי מעלה ופינה אחת כלפי מטה אז ביחד הפינות נותנות איזון מודולו 3 בכל הצבעים. אם נוסיף עוד הרבה מלבנים 3×1 זה שומר על האיזון, ואם יש פינה נוספת אז זה שובר את האיזון (אבל בלוח כולו האיזון קיים, יש 12 משבצות מכל צבע). לכן אם יש 3 פינות, כולן מכוונות כלפי מעלה או כולן כלפי מטה.
ביחד אם הטענה, שאלכסון בכל פינה משופע באותו כיוון, מקבלים שאם יש 3 פינות בדיוק אז כולן מכוונות באותה צורה, לה"כ כמו ⊞.



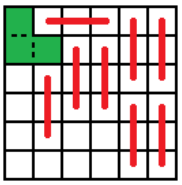
בשביל ההמשך נמספר שורות מלמטה למעלה 1, 2, ..., 6 ואת העמודות מימין לשמאל נסמן באותיות א, ב, ..., ו. כך לכל משבצת יש שם (למשל ג1 או ד3), כמו שמקובל בשח.
נחשוב על פינה שאין אף פינה שהיא בדיוק מימינה, או בדיוק מעליה או גם מימינה וגם מעליה. לפינה זאת נקרא פינה ימנית עליונה. נתבונן במשבצת שמאלית תחתונה של פינה זאת. נקראה לה **משבצת מיוחדת**. ניתן להניח, שהיא לא מתחת לאלכסון א1-ו6, הרי אחרת נשקף את התמונה ביחס לאלכסון זה.
נבדוק את המצבים האפשריים לגבי משבצת שמאלית תחתונה של פינה ימנית עליונה. ברור שהמשבצות ה5, ד5, ד4 הן לא אופציות. הרי בכל מקרה את המשבצת הנוספת בתוך ריבוע 2×2 שמכיל את הפינה הזאת צריך לכסות על ידי מלבן 3×1 וזה לא מתאפשר.



נניח המשבצת היא ג5. אז משבצת ד6 צריך לכסות במלבן ד6-ו6. אם כך, חייבים לכסות את ו5 על ידי מלבן ו5-ו3 (הרי פינה הכיוון הנתון לא תכנס לשם) ואת ה5 על ידי מלבן ה5-ה3, ומאותה סיבה את ב6 מכסים על ידי המלבן ב6-ב4 ואת א6 על ידי המלבן א6-א4. לכן חייבים לכסות את ד4 על ידי מלבן ד4-ד2 (הרי גם שם לא תיכנס פינה בכיוון הנתון) ואז את משבצת ו2 אי-אפשר לכסות, לא על ידי מלבן ולא על ידי פינה בכיוון הנתון.

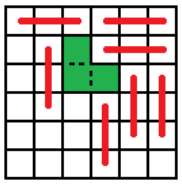


כעת נניח שהמשבצת המיוחדת היא ב5. אז את ג6 חייבים לכסות כל ידי מלבן ג6-ה6. אז את ו6 חייבים לכסות על ידי מלבן ו4-ו6, ולכן את ה5 על ידי מלבן ה3-ה5, ולכן את ד5 על ידי מלבן ד3-ד5. ברור גם שאת א6 מכסים על ידי מלבן א4-א6. לכן את ג4 צריך לכסות על ידי מלבן ג2-ג4. את ו3 חייבים לכסות על ידי מלבן ו1-ו3. לכן את ה2 לא ניתן לכסות בשום צורה (לא במלבן, ולא בפינה בכיוון הנכון).

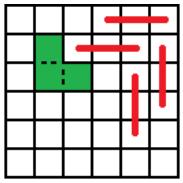


כעת נניח שהמשבצת המיוחדת היא א5. אז את ב6 חייבים לכסות כל ידי מלבן ב6-ד6. אז את ו6 חייבים לכסות על ידי מלבן ו4-ו6, ולכן את ה6 חייבים לכסות על ידי מלבן ה4-ה6, את ד5 על ידי מלבן ד3-ד5, ולכן את ג5 על ידי מלבן ג3-ג5. לכן את ב4 צריך לכסות על ידי מלבן ב2-ב4. את ו3 חייבים לכסות על ידי מלבן ו1-ו3, ולכן את ה3 חייבים לכסות על ידי מלבן ה1-ה3. לכן את ד2 לא ניתן לכסות בשום צורה.

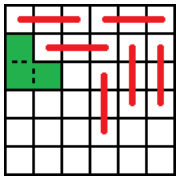
ובכן המשבצת המיוחדת לא נמצא לא בשורה 5 (וכמובן שלא בשורה 6). כבר ראינו שהיא לא ב-ד4. האם היא בכלל יכולה להיות בשורה 4?



אם המשבצת המיוחד היא ג4, אז חייבים לכסות את ד5 במלבן ד5-ו5, ואז חייבים לכסות את ו6 במלבן ד6-ו6, ואז חייבים את ו4 לכסות על ידי מלבן ו2-ו4 ולכן את ה4 לכסות במלבן ה2-ה4. כמו כן, את ג6 חייבים לכסות במלבן א6-ג6, ולכן את ב5 חייבים לכסות במלבן ב3-ב5. לכן את ד3 חייבים לכסות במלבן ד1-ד3. לכן המשבצות ה1, ו1 מנותקות ולא ניתן לכסות אותן.

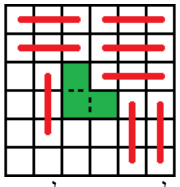


אם המשבצת המיוחד היא ב4, אז חייבים לכסות את ג5 במלבן ג5-ה5. אז את ו6 ניתן לכסות או על ידי ו4-ו6 או על ידי ד6-ו6. במקרה שיש מלבן ו4-ו6 אז את ה6 מכסים על ידי ג6-ה6 ואז את ב6 לא ניתן לכסות בשום צורה. לכן יש מלבן ד6-ו6. לכן את ו5 חייבים לכסות על ידי ו3-ו5, ולכן את ה4 חייבים לכסות על ידי המלבן ה2-ה4, אבל אז לא ניתן בשום צורה לכסות את ו2, סתירה.



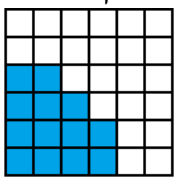
לבסוף אם המשבצת המיוחד היא א4 אז את ב5 חייבים לכסות ע"י מלבן ב5-ד5. את א6 חייבים לכסות על ידי א6-ג6, ואת ד6 על ידי ד6-ו6. לכן את ו5 מכסים על ידי ו3-ו5 ולכן את ה5 על ידי ה3-ה5 ולכן את ד4 מכסים על ידי ד2-ד4 ולכן את ו2 לא ניתן לכסות בשום צורה.

ובכן, לא יתכן שהמשבצת המיוחדת בשורה 4. ניתן גם לפסול מקרה, שהמשבצת המיוחדת



היא ד-3. במקרה זה את ד4 ניתן לכסות בשתי דרכים: ד4-ו4 או ד4-ד6. אבל שתי שהשיטות סימטריות ביחס לאלכסון, לכן לה"כ יש ד4-ו4. את ו6 ניתן לכסות רק על יד המלבן ד6-ו6, לכן את ה6 ניתן לכסות רק על ידי ד5-ו5. לכן את ג6 חייבים לכסות ע"י א6-ג6 ולן את ג5 חייבים לכסות ע"י א5-ג5. את ו3 אפשר לכסות רק על ידי ו1-ו3, לכן את ה3 חייבים לכסות על ידי המלבן ה1-ה3. לכן את ד2 לא ניתן לכסות.

ממה שבדקנו מתקבל, שאין פינה שנוגעת בשורה 5 או 6, באופן סימטרי גם אין פינה שנוגעת בעמודה ה או ו, ולפי הבדיקה האחרונה גם לא במשבצות ד3, ג4. לכן הפינות



נמצאות על המשבצות הכחולות בציור. העניין הוא שבתחום שנשאר יש מעט משבצות, וקשה להכניס לשם פינות בכיוון הנכון. אם משבצת א1 מכוסה על ידי מלבן, נגיד א1-א3 (המצב השני סימטרי) אז א4 כבר לא ניתן לכסות בפינה, ולכן נשארות 9 נקודות כחולות בלבד. אחרי שמכסים

את ב4 בפינה בצורה יחידה, נשארות רק 6 משבצות כחולות; אפשר לכסות אותן בפינות, אבל לא בצורה שכולן מכוונות בכיוון הנכון.
לכן א1 מכוסה בפינה, שתופסת גם את א2 ואת ב1 (הרי היא בכיוון הנכון). אם נכסה בפינה את ב2 כבר לא יתאפשר להכניס למשבצות הכחולות עוד פינה בכיוון הנכון.
אם לא, אז נשארות רק 4 דרכים להכניס פינה בכיוון הנכון, ובכל מקרה מכסים משבצת ב3 או ג2. אם מכניסים שתי פינות, מכסים באמצעות הפינות גם את ב3 וגם את ג2, וזה אומר כי ב2 מבודדת, ואי-אפשר לכסות אותה בשום צורה. סתירה בכל מקרה.

4. דני מקבל לוח משבצות 2013×2013, שכל המשבצות שלו צהובות, דלי גדול של צבע כחול ומספר $\ell \le 2013$. מותר לו לצבוע בכחול מספר משבצות, כך שכל משבצת כחולה תהיה בשורה שבה יש לא יותר מאשר ℓ משבצות כחולות או בעמודה שבה יש לא יותר מאשר ℓ משבצות כחולות. מהו המספר הגדול של משבצות שמותר לו לצבוע?
(התשובה כמובן תלויה ב- ℓ.)

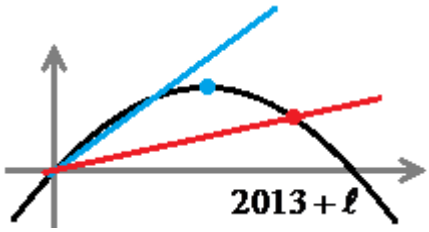
תשובה. $\left\lfloor \frac{(2013+\ell)^2}{4} \right\rfloor$ כאשר $\ell \le 671$, ו- $2\ell(2013-\ell)$ עבור עבור $\ell > 671$.

פתרון. ניתן להחליף כל שתי שורות או כל שתי עמודות בלי לפגוע בתכונה. לכן ניתן להניח, שכמות המשבצות הכחולות בשורות זו סדרה מונוטונית לא עולה (כאשר מסתכלים מלמעלה למטה). כמו כן, ניתן להניח שכמות משבצות כחולות בעמודות זו סדרה מונוטונית שלא עולה (כאשר מסתכלים משמאל לימין).
נסמן ב- N את כמות המשבצות הכחולות הכוללת בלוח (על מנת שלא נצטרך כל פעם לכתוב "כמות המשבצות הכחולות הכוללת בלוח").
נניח כי בדיוק ב- k עמודות ימניות יש לא יותר מאשר ℓ משבצות כחולות, וכן בדיוק ב- m שורות תחתונות יש לא יותר מאשר ℓ משבצות כחולות. אז בתוך המלבן $(2013-k)\times(2013-m)$ אין משבצות כחולות בכלל.
לכן כל המשבצות הכחולות נמצאות או ב- k העמודות הימניות, ששם יש לכל היות $k\ell$ משבצות כחולות, או ב- m השורות התחתונות, ששם יש לכל היותר $m\ell$ משבצות כחולות. לכן $N \le (k+m)\ell$.
נעריך את כמות המשבצות הכחולות בעוד שיטה. ב- k העמודות הימניות יש לכל היותר $k\ell$ משבצות. כל המשבצות הכחולות האחרות מוכלות ב- $2013-k$ עמודות שמאליות וב- m עמודות תחתונות, כלומר במלבן ששטחו $(2013-k)m$.
לכן $N \le (2013-k)m+k\ell$.
ניתן להוכיח באופן דומה גם $N \le (2013-m)k+m\ell$.
לה"כ, ניתן להניח כי $k \le m$ (אחרת נשקף ביחס לאלכסון).
אז קל לראות כי $(2013-m)k+m\ell \le (2013-k)m+k\ell$, מכיוון שאם מעבירים את הכול לאגף ימין מקבלים $0 \le (2013-\ell)(m-k)$.
לכן, בהנחה ש- $k \le m$, מה שהוכחנו לגבי N זה
$N \le \min\left((2013-m)k+m\ell, (k+m)\ell\right)$.
שני הביטויים גדלים מונוטונית כאשר k גודל, לכן ניקח k גדול ככל האפשר, כלומר $k=m$, ונקבל $N \le \min\left((2013-m+\ell)m, 2m\ell\right)$.

כיצד לבחור m שיאפשר לקבל את N הגדול ביותר?



הגרף של $p(m)=(2013+\ell-m)m$ הוא פרבולה שמכוונת כלפי מטה. p מתאפס כאשר $m=0$ או $m=2013+\ell$, ומקבל את הערך המקסימלי בדיוק באמצע בין שני השורשים, ב- $\frac{2013+\ell}{2}$. הערך גדול ככל שמתקרבים ל- $\frac{2013+\ell}{2}$. כאשר ℓ אי-זוגי, ניתן לקחת את $m=\frac{2013+\ell}{2}$, וכאשר ℓ זוגי ניתן לקחת את $m=\frac{2013+\ell\pm1}{2}$ על מנת ש- $p(m)$ יקבל את הערך הגדול ביותר. אם ℓ אי-זוגי אז הערך של $p(m)$ הגדול ביותר בנקודה שלמה הוא $\left(\frac{2013+\ell}{2}\right)^2$, וכאשר ℓ זוגי זה $\frac{2013+\ell-1}{2}\cdot\frac{2013+\ell+1}{2}=\frac{(2013+\ell)^2-1}{4}$, ואת שני המקרים ניתן לתאר על ידי נוסחה אחת עם חלק שלם: $N\le\left\lfloor\frac{(2013+\ell)^2}{4}\right\rfloor$.



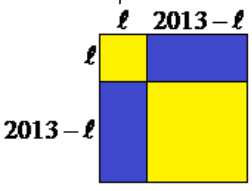
כמובן, צריך להתחשב גם באי-שוויון $N\le2m\ell$.
אם האי-שוויון הזה מאפשר לקחת את הקודקוד של הפרבולה אז זה אי-שוויון הכי טוב מאלה שהצלחנו להוכיח עד עכשיו, ואם לא אז הנקודה הגי גבוהה שאפשר לקחת על הגרף זה חיתוך בין הפרבולה הישר $y=2\ell\cdot x$, כלומר m שפותר את המשוואה

$$2\ell m=(2013+\ell-m)m$$

יש נקודת מפגש ב-0 ונקודת מפגש נוספת כאשר $2\ell=2013+\ell-m$.
כלומר כאשר $\ell+m=2013$. החיתוך מתרחש כאשר m שלם, ושם שתי ההערכות יתנו אותו ערך עבור m זה. כמובן, אם החיתוך הוא משמאל לקודקוד הפרבולה, זה לא משנה: עדיין אפשר עדיף לקחת קודקוד של פרבולה.

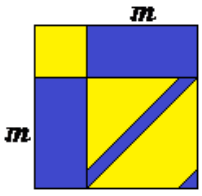
ובכן, אם $2013-\ell\le\frac{2013+\ell}{2}$, כלומר $2\cdot2013-2\ell\le2013+\ell$ במילים אחרות $2013\le3\ell$ כלומר $671\le\ell$, אז מצליחים להוכיח כי $N\le\left\lfloor\frac{(2013+\ell)^2}{4}\right\rfloor$, ואחרת, כלומר כאשר $671>\ell$, מצליחים להוכיח כי עבור $m=2013-\ell$ מקבלים $N\le2m\ell=2\ell(2013-\ell)$ ולכך m אחר אף פחות מזה.

כעת צריך להבין, האם ההערכות האלו הדוקות. בשביל זה צריך להיזכר כיצד קיבלנו את ההערכות, והאם במקרים אלה אפשרי להפוך אי-שוויון לשוויון.



את $2\ell(2013-\ell)$ ניתן לקבל תמיד, אם מסמנים את כל המשבצות ב- ℓ שורות ראשונות שהן ב- $2013-\ell$ עמודות אחרונות, וגם ב- ℓ שורות אחרונות שהן ב- ב- $2013-\ell$ עמודות ראשונות.

עבור $671<\ell$ זה נותן דוגמה, בה החסם שלנו הדוק.



נישאר להבין מקרה של $671\le\ell$. במקרה זה נבחר $m=\left\lfloor\frac{2013+\ell}{2}\right\rfloor$. פינה $(2013-m)\times(2013-m)$ בחלק שמאלי-עליון של הריבוע תישאר צהובה. משבצות אחרות ב-$2013-m$ שורות עליונות שהן ב-m עמודות ימניות, וגם המשבצות ב-$2013-m$ עמודות שמאליות שהן ב-m שורות אחרונות.

אז בכל אחד מבין m שורות אחרונות ושל ב-m עמודות ימניות, כבר יהיו $\left\lfloor\frac{2013-\ell}{2}\right\rfloor$ משבצות כחולות שזה פחות מ-ℓ. אז אפשר לצבוע בריבוע $m\times m$ ימני תחתון עוד s משבצות בכל שורה ובכל עמודה, כאשר $s=\ell-\left\lfloor\frac{2013-\ell}{2}\right\rfloor$.

אחת הדרכים לעשות את זה, לצבוע משבצת בשורה x ועמודה y של ריבוע $m\times m$ ימני תחתון אך ורק כאשר $x+y=1,2,...,s\pmod m$. במקרה זה אי-שוויונים שרשמנו הופכים לזהויות, וזה משלים את הפתרון.

5. לוח $(2a+1)\times(2b+1)$, כאשר a,b מספרים שלמים, מכוסה כמעט לגמרי על ידי דומינו: כל דומינו מכסה שתי משבצות, וכל משבצות חוץ מפינה שמאלית עליונה מכוסה (על ידי אבן דומינו אחת בדיוק). פינה שמאלית עליונה ריקה.
מותר לבצע פעולה כזאת: אם צלע של משבצת ריקה מתלכדת עם הצלע הקצרה של אבן דומינו כלשהי, מותר להזיז את אבן הדומינו לאורך הצלע הארוכה, כך שהאבן תכסה את המשבצת הריקה, ותפנה משבצת אחרת. הוכיחו, שבמהלכים כאלה ניתן להעביר את המשבצת הריקה לכל פינה אחרת.

פתרון. נחשוב על השאלה מהסוף. ניקח משבצת פינתית לא ריקה: נסמן אותה A_0. המשבצת A_0 מכוסה בדומינו, שהינו רוצים להזיז בכיוון ספציפי, ואז הוא יעלה על משבצת A_1. אבל גם משבצת A_1 מכוסה בדומינו, שהיה אפשר להזיז אותו משבצת אחד בכיוון של האורך שלו כך שישחר את A_1, ואז יתפוס את המשבצת A_2. כך נמשיך, כל עוד אפשר.
אם באיזשהו שלב נגיע למשבצת ריקה, אז נקבל שרשרת של דומינו, שאפשר להזיז את כולם (בסדר ההפוך לסדר שבו מצאנו אותם) ולשחר את המשבצת הפינתית A_0. יתכנו עוד שני מצבים: או שבשלב כלשהו נכנס למעגל, או שבשלב כלשהו נרצה להזיז דומינו החוצה מהלוח. אנחנו נראה ששני מצבים אלה בעצם לא יכולים להופיע.
נשים לב שהמשבצות $A_0,A_1,A_2,A_3,...$ נמצאות כולן בשורות אי-זוגיות ובעמודות אי-זוגיות. לכן לא יתכן שנרצה להוציא דומינו מחוץ ללוח, כי אז A_k יהיה בשורה או עמודה זוגית.

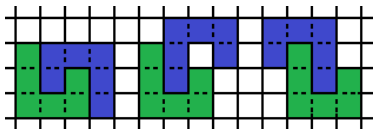
נניח שהתהליך יכנס למעגל, כלומר $A_k=A_m$ עבור $k<m$. נכניס מערכת צירים, כך שהצירים מקבילים לצלעות של המשבצות, וראשית הצירים במרכז של אחד המשבצות.

נניח שבשלב כלשהו התהליך יהפוך למעגלי. אז המצולע $A_kA_{k+1}A_{k+2}...A_{m-1}$ הוא מצולע עם צלעות באורך 2 (או כפולות של 2) וזוויותיו כפולות של 90°. לכן ניתן לחלק אותו לריבועים 2×2, ולכן שטחו מתחלק ב-4. גם היקפו מתחלק ב-4. אכן, כאשר עוברים על היקף המצולע באופן מעגלי, כל צלע של מצולע הוא צעד באחד מ-4 הכיוונים באורך 2. אבל כמות הצעדים למעלה שווה לכמות הצעדים למטה, לכן כמות הצעדים האנכיים זוגי, וכך גם כמות הצעדים האופקיים, לכן בסה"כ יש מספר זוגי של צעדים, וההיקף גדול פי 2 מכמות הצעדים.לכן מספר הנקודות השלמות על היקף המצולע מתחלק ב-4. לכן לפי נוסחת פיק בתוכו מספר אי-זוגי של משבצות שלמות. זה לא יתכן, כי נקודות שלמות הן מרכזי המשבצות של הלוח, ומרכזי המשבצות בתוך המצולע חולקו לזוגות באמצעות ריצוף דומינו.

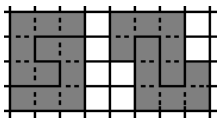
6. עבור איזה m,n ניתן לרצף לוח $m\times n$ על ידי אבנים בצורת "קרס" – צורה של 6 משבצות שמופיעה בציור? (מותר לסובב \ לשקף.)



תשובה. צריך להיות צלע שמתחלק ב-4, צריך להיות צלע שמתחלק ב-3 (יכול להיות אותו צלע או צלע שונה), ואף צלע לא שווה ל-1, 2 או 5.



פתרון. בכל קרס יש משבצת פנימית ריקה, שצריך לכסות אותה באמצעות קרס אחר. יש 3 דרכים לעשות זאת (בציר מכסים משבצת פנימית ריקה של קרס ירוק באמצעות קרס כחול. בשיטה האמצעית מקבלים שאי-אפשר להמשיך את הריצוף. בשתי השיטות האחרות מקבלים שאת המשבצת הפנימית הריקה של הקרס הכחול מכסה הקרס הירוק. ובכן, הקרסים חייבים להתחלק לזוגות, וכל זוג יוצר צורה של 12 משבצות, שזה או מלבן 3×4 או "מלבן עקום". מזה כבר מתקבל, שאם מצליחים לרצף את המלבן, שטחו חייב להתחלק ב-12. כלומר $m\cdot n$ מתחלק ב-12. כלומר m או n מתחלק ב-3, ובנוסף חייבים ש-m או n יתחלק ב-4 או שגם m וגם n יהיו זוגיים.

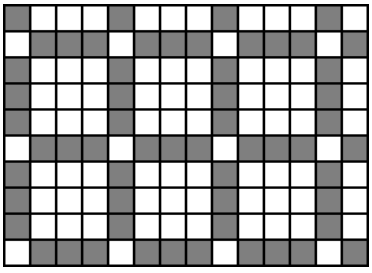


עם צלע אחת של המלבן מתחלקת ב-3 והשנייה מתחלקת ב-4 אז המלבן מתחלק למלבנים 3×4 וכל אחד מהמלבנים מתחלק לשני קרסים.

אם יש למלבן צלע שמתחלקת ב-3 וגם ב-4 אז היא מתחלקת ב-12.

קל לראות שהמלבן 3×12 וגם 4×12 ניתן לחלק למלבנים 3×4 ואז לקרסים, לכן ניתן לחלק לקרסים גם מלבנים 12×6, 12×7, 12×8 (הרי $6=3+3$, $7=3+4$, $8=4+4$), ואז אפשר תמיד להוסיף 12×3 מספר פעמים ולהגיע למלבן $12\times k$ עבור כל $k\ge 6$. לכן ניתן לרצף מלבן $12\times k$ לכל $k\neq 1,2,5$. כל לראות שאם למלבן יש צלע 1 או 2 אז אי-אפשר לרצף אותו בכלל, אפילו קרס אחד אי-אפשר להכניס בו. אם יש צלע של 5 זה גם בעיתי. נתבונן בפינות שנמצאות ליד הצלע באור 5. כל פינה חייבים לכסות על ידי קרס, והקרסים האלה שונים ובהכרח נחתכים.

ובכן, כבר הסברנו מה קורה כשצלע מסוימת מתחלקת ב-4, ומה קורה כאשר שטח לא מתחלק ב-12. נשאר לבדוק מקרה בו אין צלע שמתחלקת ב-4, אבל שטח מתחלק ב-12. כלומר כל צלע מתחלקת ב-2, אבל לא ב-4, במילים אחרות $(4a+2)\times(4b+2)$.



במקרה זה ניתן להוכיח, שאין ריצוף.

ניתן לבנות הוכחה באמצעות צביעה:

קל לראות, שכל צורה של 12 משבצות מהסוג שתיארנו

מכסה מספר אי-זוגי של משבצות כהות בצורה שלנו. לא קשה גם לספור, שסה"כ בלוח $(4a+2)\times(4b+2)$ יש מספר זוגי של משבצות כהות. אנו נשאיר את הבדיקה כתרגיל לקוראים.
לכן צריך שכמות הצורות של 12 משבצות תהיה זוגית, ואז כמות המשבצות תתחלק ב-24 וזה לא קורה – מספר הכולל של המשבצות מתחלק ב-4 אבל לא ב-8. סתירה.

הערה. החלק הקשה בפתרון הוא כמובן המקרה $(4a+2)\times(4b+2)$. הצביעה שהראנו נותנת פתרון קצר, אבל קשה להמציא צביעה כזאת.
פתרון קצת יותר ארוך, שמסביר כיצד אפשר להמציא את הפתרון הזה, מתקבל משתי צביעות. בצביעה אחת צובעים כל שורה רביעית, ובשנייה צובעים כל עמודה רביעית. כל צורה תקנית של 12 משבצות יכולה להיות במצב אופקי או אנכי. אם היא במצב אנכי, היא מכסה 3 משבצות של צביעה ראשונה ומספר זוגי (2 או 4) משבצות של צביעה שנייה. אם היא במצב אנכי, הכול הפוך. לכן צביעה ראשונה מוכיחה שיש מספר זוגי של צורות של 12 משבצות במצב אנכי, וצביעה שנייב מוכיחה שיש מספר זוגי של צורות במצב אופקי.
כאשר מחברים את שתי התוצאות, רואים שיש מספר זוגי של צורות של 12 משבצות. ניתן לחבר את שתי המספרים מודולו 2 כבר בשלב של בניית הצביעות, ואז מתקבלת צביעה שהיא XOR של שתי הצביעות. וזו הצביעה שציירנו.