תרגיל 4

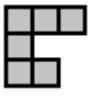
1. על לוח משבצות 13×13 רוצים להניח אבני דומינו, כך שכל אבן דומינו תכסה שתי משבצות סמוכות. אסור שהאבנים תגענה זו בזו, אפילו בקודקודים. מהי הכמות המרבית של אבני דומינו שעלולות להיות?

2. במשבצות של ריבוע 4×4 רשומים מספרים מ-1 עד 16, כל מספר מופיע פעם אחת בדיוק. ריבוע הוא ריבוע קסם, כלומר סכום המספרים בכל שורה, בכל עמודה ובכל אחד מבין שני האלכסונים של הריבוע יוצא זהה. נתון בנוסף, שהמספרים 1 ו-16 רשומים בפינות נגדיות של הריבוע. הוכיחו, שלכל שני מספרים סימטריים ביחס למרכז הריבוע, סכומם 17.

3. לוח 6×6 חולק ל-12 צורות, כאשר כל צורה מורכבת מ-3 משבצות. מבין הצורות יש K פינות ⊞ והאחרות הן מלבנים □□□. מצאו את כל הערכים האפשריים של K.

4. דני מקבל לוח משבצות 2013×2013, שכל המשבצות שלו צהובות, דלי גדול של צבע כחול ומספר $\ell\le2013$. מותר לו לצבוע בכחול מספר משבצות, כך שכל משבצת כחולה תהיה בשורה שבה יש לא יותר מאשר ℓ משבצות כחולות או בעמודה שבה יש לא יותר מאשר ℓ משבצות כחולות. מהו המספר הגדול של משבצות שמותר לו לצבוע?
(התשובה כמובן תלויה ב- ℓ.)

5. לוח $(2a+1)\times(2b+1)$, כאשר a,b מספרים שלמים, מכוסה כמעט לגמרי על ידי דומינו: כל דומינו מכסה שתי משבצות, וכל משבצות חוץ מפינה שמאלית עליונה מכוסה (על ידי אבן דומינו אחת בדיוק). פינה שמאלית עליונה ריקה.
מותר לבצע פעולה כזאת: אם צלע של משבצת ריקה מתלכדת עם הצלע הקצרה של אבן דומינו כלשהי, מותר להזיז את אבן הדומינו לאורך הצלע הארוכה, כך שהאבן תכסה את המשבצת הריקה, ותפנה משבצת אחרת. הוכיחו, שבמהלכים כאלה ניתן להעביר את המשבצת הריקה לכל פינה אחרת.

6. עבור איזה m,n ניתן לרצף לוח $m\times n$ על ידי אבנים בצורת "קרס" –  צורה של 6 משבצות שמופיעה בציור? (מותר לסובב \ לשקף.)