תרגיל 3

1. נתון פולינום p ממעלה שנייה בעל מקדמים ממשיים, שמקיים: $p(x)>0$ לכל $x\geq 0$ ממשי.

א. האם בהכרח כל המקדמים שלו חיוביים?

ב*. האם בהכרח ניתן לרשום אותו בתור $\frac{q(x)}{r(x)}$, כאשר q,r הם פולינומים בעלי מקדמים חיוביים?

תשובה. א. לא. ב. כן.

פתרון. א. למשל הפולינום $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ חיובי לכל x, אבל לא כל המקדמים חיוביים.

ב. ניקח פולינום כזה, $p(x)=ax^2+bx+$. קל לראות כי $a>0$, הרי אם $a<0$ זה יהיה חיובי עבור x גדול, ואם $a=0$ זה לא ריבועי. ניתן לחלק את p ב-a והשאלה לא תשתנה בצורה מהותית. ובכן, להה"כ $p(x)=x^2+bx+c$.

קל לראות כי $c=p(0)>0$. ניתן לבצע הצבה $x=\sqrt{c}\cdot t$, ואז נקבל

$$p\left(\sqrt{c}\cdot t\right)=ct^2+\beta t+c$$.

כאשר $\beta=b\sqrt{c}$. כרגע ניתן לחלק את הפולינום ב-c. כמובן כל זה לא משפיע על השאלה באופן מהותי, הרי אפשר לעשות הצבה הפוכה $t=x/\sqrt{c}$.

לכן מספיק לפתור את השאלה עבור פולינומים מהסוג $p(x)=x^2+bx+1$.

אם $b>0$ אז אין על מה לדבר: $p(x)=p(x)/1$.

בכל מקרה $b>-2$, הרי $p(1)=2+b$. לכן נשאר לטפל במקרה $-2<b\leq 1$.

בעצם, אם נצליח להכפיל את הפולינום במספר פולינומים, שלכולם יש מקדמים חיוביים, ולקבל בסוף פולינום עם מקדמים חיוביים אז גם נוכיח את הטענה. הרי מכפלה של פולינומים עם מקדמים חיוביים זה פולינום עם מקדמים חיוביים.

נשים לב, כי $p(-x)$ הוא פולינום עם מקדמים חיוביים. נכפיל בו:

$$\left(x^2-bx+1\right)\left(x^2+bx+1\right)=\left(x^2+1\right)^2-b^2x^2=x^4+\left(2-b^2\right)x^2+1$$.

נסמן $b_2=2-b^2$. אם $b_2>0$ אז כבר יש לנו פולינום עם מקדמים אי-שליליים. אם לא, אז $\left(x^4+b_2x^2+1\right)\left(x^4-b_2x^2+1\right)=x^8+b_3x^4+1$, כאשר $b_3=2-b_2^2$.

בצורה כזאת אפשר להמשיך, ותמיד יהיה מקדם אחד באמצע שיכול להיות חיובי או שלילי, שמחושב לפי נוסחת נסיגה: $b_{n+1}=2-b_n^2$.

מכיוון ש-$-2<b=b_1\leq 0$, ניתן לסמן $b_1=b=-2\cos\alpha$, כאשר $\frac{\pi}{2}>\alpha>0$.

אז $-b_2 = b^2 - 2 = 2\cos 2\alpha$ ובאופן דומה $-b_n = 2\cos\left(2^{n-1}\alpha\right)$.

קיים n עבורו $\frac{1}{2^{n+1}} \le \frac{\alpha}{\pi} < \frac{1}{2^n}$, ואז בעצם אחרי $n+1$ פעולות נקבל פולינום בעל מקדמים אי-שליליים מדרגה 2^{n+2}, וזה אחרי שהכפלנו את הפולינום המקורי בפולינום עם מקדמים אי-שליליים. כעת ניתן להכפיל ב- $1+x+x^2+\ldots+x^N$, עבור N גדול מספיק, את שני האגפים, ולהפוך את כל המקדמים לחיוביים.

2. נתון פולינום $p(x) = x^2 + ax + b$, כאשר a,b שלמים.

א. נניח כי לכל x שלם, מתקיים $p(x) \ge 0$. האם בהכרח גם לכל x ממשי מתקיים $p(x) \ge 0$?

ב. נניח כי לכל x שלם, מתקיים $p(x) > 0$. האם בהכרח גם לכל x ממשי מתקיים $p(x) > 0$?

תשובה. א. לא. ב. כן.

פתרון. א. למשל $p(x) = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$, הוא שלילי רשק בקטע $(-2,-1)$, אבל קטע זה לא מכיל מספרים שלמים.

ב. נניח שעבור פולינום מסוים זה לא מתקיים. אז לפולינום יש שני שורשים α,β ממשיים, כאשר $\alpha \le \beta$. במקרה זה אין בקטע $[\alpha,\beta]$ נקודות שלמות, לכן $\beta - \alpha < 1$. לכן גם $1 > (\beta-\alpha)^2 = (\beta+\alpha)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 4b$. אבל $a^2 - 4b$ זה מספר שלם. לכן $0 = (\beta-\alpha)^2 = a^2 - 4b$, כלומר $\alpha = \beta$, כלומר למשוואה יש שורש כפול.
לכן למשוואה יש שורש כפול. סכום השורשים הוא מספר שלם, לכן שורש הוא מספר חצי שלם. כלומר אם השורש הכפול הוא מספר לא שלם, אז הוא מהסוג $\frac{2a+1}{2}$. אבל אז מכפלת השורשים זה מספר לא שלם, בניגוד לנתון.

3. האם קיים p פולינום מדרגה 6, המקיים: לכל x ממשי,

$$p(\cos(x)) + p(\sin(x)) = 1 \quad ?$$

תשובה. כן.
פתרון ראשון. נשים לב כי

$$1 = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 = \sin^6 x + 3\cos^2 x \cdot \sin^4 x + 3\cos^4 x \cdot \sin^2 x + \cos^6 x =$$
$$= \sin^6 x + 3\sin^4 x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) + \cos^6 x + 3\cos^4 x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right)$$

לכן הפולינום $p(s) = s^6 + 3s^4\left(1 - s^2\right) = 3s^4 - 2s^6$ עובד.

פתרון שני.

$$\cos 3x + i\cdot\sin 3x = \left(\cos x + i\sin x\right)^3 =$$
$$= \cos^3 x + 3i\cdot\cos^2 x\cdot\sin x - 3\cos x\cdot\sin^2 x - i\cdot\sin^3 x$$

ולכן

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\cdot\sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x\cdot\left(1-\cos^2 x\right) =$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$\sin 3x = 3\cos^2 x\cdot\sin x - \sin^3 x = 3\sin x\cdot\left(1-\sin^2 x\right) - \sin^3 x =$$
$$= 3\sin x - 4\sin^3 x$$

לכן אם ניקח $q(s) = 4s^3 - 3s$ אז

$$q(\cos x) = \cos 3x = \cos(-3x)$$
$$q(\sin x) = -\sin 3x = \sin(-3x)$$

לכן $p^2(\cos x) + q^2(\sin x) = 1$.

4. לכל פולינום $p(z)$ בעל מקדמים מרוכבים, נסמן $S(p,v)$ קבוצת כל המספרים המרוכבים z עבורם $p(z) = v$. נניח שפולינומים p,q מקיימים $S(p,0) = S(q,0)$, וכן $S(p,1) = S(q,1)$. הוכיחו כי $p = q$.

פתרון. ניתן להניח לה"כ כי $\deg p = n$, וכן $\deg q \le n$. במקרה זה, על מנת להוכיח כי $p = q$ מספיק למצוא $n+1$ נקודות שונות $x_0, x_1, ..., x_n$ המקיימות $p(x_i) = q(x_i)$, הרי אז ל-$p - q$ יש $n+1$ שורשים.

בד"כ $S(p,0)$ זה כבר n נקודות, אבל יכול להיות שיש ל-p שורשים עם ריבוי. כל שורש מריבוי k של p הוא גם שורש של p' עם ריבוי $k-1$.

לכן $\left|S(p,0)\right| = n - n_0$, כאשר n_0 זה כמות הכוללת עם ריבוי של שורשי p' בנקודות שהן שורשים של p.

באופן דומה, $S(p,1)$ זה שורשים של $p-1$, ולכן $\left|S(p,1)\right| = n - n_1$, כאשר n_1 זה כמות השורשים של $p' = (p-1)'$ עם ריבוי בין השורשים של $p-1$.

אבל הנקודות בהן $p(x) = 0$ והנקודות בהן $p(x) = 1$ שונות, לכן $n_0 + n_1$ אינו עולה על כמות השורשים הכוללת של p', כלומר על $\deg(p') = n-1$. לכן $n_0 + n_1 \le n-1$.

$$\left|S(p,0)\cup S(p,1)\right| = \left|S(p,0)\right| + \left|S(p,1)\right| = n - n_0 + n - n_1 \ge 2n - (n-1) = n+1$$

לכן p,q מתלכדים ב-$n+1$ נקודות ולכן הם שווים.

5. א. פולינום $p(x)$ מקיים: $p(x) > 0$ לכל x ממשי. הוכיחו כי קיים $\varepsilon > 0$ עבורו $p(x) > \varepsilon$ לכל x ממשי.

ב*. כלומר בהנחה שלכל x,y ממשיים מתקיים $p(x,y) > 0$, האם בהכרח קיים $\varepsilon > 0$ עבורו $p(x,y) > \varepsilon$ לכל x,y ממשיים?

תשובה. א. כן. ב. לא.

א. פתרון ראשון. ל-p' יש מספר סופי של אפסים, כי גם זה פולינום. כאשר x שואף ל-∞ או ל-$-\infty$, אז $p(x)$ גם שואף ל-∞ או ל-$-\infty$, אבל במקרה שלנו ניתן להניח שזה שואף ל-∞. השורשים של נגזרת מחלקים את הישר הממשי לתחומים, שבכל תחום p מונוטוני, והמינימום של כל תחום באחד הקצוות, בתחומים האינסופיים המינימום אינו בקצה האינסופי. לכן לכל x קיים x_0 שהוא שורש של p' כך ש-$p(x_0)\le p(x)$.

יהיה $m=\min p(x_0)$, כאשר x_0 זה שורש של p'. זה מספר חיובי. אז כל ε בתחום $[0,m]$ מקיים את התנאי.

פתרון שני. ל-p אין שורשים ממשיים, אבל יש לו שורשים מרוכבים. ניתן לרשום את p בתור $p(x)=A(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$. נניח כי מרחק מינימלי בין x_i לציר הממשי הוא δ. אז לכל x ממשי $|x-x_i|\ge\delta$. לכן

$$|p(x)|=|A||x-x_1|\cdot|x-x_2|\cdot\ldots\cdot|x-x_n|\ge|A|\cdot\delta^n.$$

בעצם, $p(x)$ חיובי לכל x ממשי, לכן $p(x)=|p(x)|$ לכל x ממשי.

ובכן לכל x ממשי $p(x)\ge|A|\cdot\delta^n$, לכן כל ε בתחום $\left[0,|A|\cdot\delta^n\right]$ יעבוד.

ב. נתבונן בפולינום $x^2+(xy-1)^2$. פולינום זה כמובן אי-שלילי, הרי הוא סכום של ריבועים. על מנת שהוא יתאפס, הריבועים צריכים להיות ריבועים של אפסים בו-זמנית, כלומר צריכה להתקיים מערכת משוואות:

$$\begin{cases}xy-1=0\\x=0\end{cases}$$

אין מצב שזה יתקיים: אם $x=0$ אז כבר לא נקבל $xy=1$.

לכן פולינום זה חיובי. אבל אפשר לראות שהפולינום יכול להתקרב ל-0 כרצוננו, יותר קרוב מכל ε. אכן, אם ניקח $y=\frac{1}{x}$, אז המחובר השני יתאפס, והערך יהיה x^2. אם ניקח x מאוד קרוב ל-0 אבל שונה ממנו (אסור לקחת $x=0$ כאשר $y=\frac{1}{x}$) נקבל שגם x^2 מאוד קרוב ל-0.

6. א. פולינום $p(x)$ מקיים: $p(x)\ge0$ לכל x ממשי. הוכיחו כי ניתן לייצג אותו בתור סכום של ריבועים של פולינומים.

ב*. האם זה נכון עבור פולינום בשני משתנים?

תשובה של ב': לא.

פתרון. א. קל לראות שהמקדמים של p ממשיים, הרי אפשר לחשב אותם ממערכת משוואות ליניארית בהינתן $p(0),p(1),\ldots,p(n)$. למערכת משוואות זו פתרון יחיד הרי פולינום מדרגה n מוגדר על ידי ערכים ב-$n+1$ נקודות, ופעולות של אלגברה יהפכו מספרים ממשיים למספרים ממשיים.

כאשר $x\to\infty$ אז גם $p(x)\to\infty$, לכן המקדם המוביל חיובי.

ל-$p(x)$ יש n שורשים מרוכבים. כל שורש ממשי חייב להיות עם ריבוי זוגי, הרי בכל שורש עם ריבוי אי-זוגי הפולינום מחליף סימן. כל שורש לא ממשי α, גם $\overline{\alpha}$ הוא שורש, ומאותו ריבוי. כלומר את כל השורשים ניתן לחלק לזוגות: $\alpha_1,\overline{\alpha_1},\alpha_2,\overline{\alpha_2},...,\alpha_k,\overline{\alpha_k}$.
לכן את הפולינום ניתן לרשום כך:

$$p(x)=A(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot...\cdot(x-\alpha_k)\cdot(x-\overline{\alpha_1})(x-\overline{\alpha_2})\cdot...\cdot(x-\overline{\alpha_k}).$$

כבר הוכחנו כי A חיובי. נרשום

$$\sqrt{A}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot...\cdot(x-\alpha_k)=q(x)+i\cdot r(x)$$

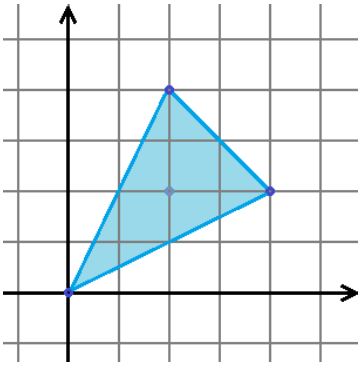
כאשר q,r פולינומים בעלי מקמים ממשיים. אזי

$$p(x)=(q(x)+i\cdot r(x))\cdot(q(x)-i\cdot r(x))=q^2(x)+r^2(x).$$

ב. נתבונן בפולינום $p(x,y)=1+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2$.
הפולינום הזה אי-שלילי, הרי לפי אי-שוויון הממוצעים

$$1+x^2y^4+x^4y^2\geq 3\cdot\sqrt[3]{1\cdot x^2y^4\cdot x^4y^2}=3x^2y^2.$$

אבל אנחנו נראה, שהפולינום אינו סכום ריבועים.



מצולע של ניוטון עבור פולינום של שני משתנים שהוא סכום של מונומים $a_{i,j}x^iy^j$ הוא קמור של נקודות (i,j) במישור הקרטזי, עבורם $a_{i,j}\neq 0$ (בצורה דומה מוגדר הפאון של ניוטון למימדים גבוהים יותר). למשל במקרה הפולינום שבנינו, המצולע של ניוטון הוא משולש שבציור.

מספר טענות פשוטות נשאיר כתרגיל לקורא:
א. עבור שני פולינומים p,q בשני משתנים, מצולע ניוטון של $p\cdot q$ שווה לסכום מינקובסקי של מצולע ניוטון של p ומצולע ניוטון של q.
ב. עקב כך, מצולע ניוטון של p^2 הוא מצולע ניוטון של p לאחר הומותטיה עם מקדם 2 ומרכז בראשית הצירים. מקדמים שמתאימים לקודקודי המצולע חיוביים.
ג. מצולע ניוטון של $p_1+p_2+...+p_n$ מוכל בקמור של מצולעי ניוטון של p_i.
ד. מצולע ניוטון של $p_1^2+p_2^2+...+p_n^2$ שווה לקמור מצולעי ניוטון של p_i לאחר הומותטיה עם מקדם 2 ומרכז בראשית.

מהטענה האחרונה נובע, שאם הפולינום שלנו הוא $p_1^2+p_2^2+...+p_n^2$, אז כל המונומים של כל p_i נמצאים במשולש, שהוא הומותטיה עם מקדם חצי של מצולע ניוטון של הפולינום הנתון. זה משולש, שקודקודי הם $(0,0),(1,2),(2,1)$, ובתוכו יש רק נקודה אחת בנוסף לקדקודים והיא $(1,1)$.
לכן כל פולינום ברשימה הוא מהסוג $a+bxy+cx^2y+dxy^2$. נתבונן במקדם של x^2y^2 של $\left(a+bxy+cx^2y+dxy^2\right)^2$. קל לראות שזה b^2. לכן הוא אי-שלילי.
לכן אם הפולינום שלנו היה סכום ריבועים, אז מקדם של x^2y^2 היה אי-שלילי. סתירה.