<u>תרגיל 3</u>

1. נתון פולינום p ממעלה שנייה בעל מקדמים ממשיים, שמקיים: $p(x)>0$ לכל $x\geq 0$ ממשי.

א. האם בהכרח כל המקדמים שלו חיוביים?

ב*. האם בהכרח ניתן לרשום אותו בתור $\frac{q(x)}{r(x)}$, כאשר q,r הם פולינומים בעלי מקדמים חיוביים?

2. נתון פולינום $p(x)=x^2+ax+b$, כאשר a,b שלמים.

א. נניח כי לכל x שלם, מתקיים $p(x)\geq 0$. האם בהכרח גם לכל x ממשי מתקיים $p(x)\geq 0$?

ב. נניח כי לכל x שלם, מתקיים $p(x)>0$. האם בהכרח גם לכל x ממשי מתקיים $p(x)>0$?

3. האם קיים p פולינום מדרגה 6, המקיים: לכל x ממשי,

$$p(\cos(x))+p(\sin(x))=1 \quad ?$$

4. לכל פולינום $p(z)$ בעל מקדמים מרוכבים, נסמן $S(p,v)$ קבוצת כל המספרים המרוכבים z עבורם $p(z)=v$. נניח שפולינומים p,q מקיימים $S(p,0)=S(q,0)$, וכן $S(p,1)=S(q,1)$. הוכיחו כי $p=q$.

5. א. פולינום $p(x)$ מקיים: $p(x)>0$ לכל x ממשי. הוכיחו כי קיים $\varepsilon>0$ עבורו $p(x)>\varepsilon$ לכל x ממשי.

ב*. כלומר בהנחה שלכל x,y ממשיים מתקיים $p(x,y)>0$, האם בהכרח קיים $\varepsilon>0$ עבורו $p(x,y)>\varepsilon$ לכל x,y ממשיים?

6. א. פולינום $p(x)$ מקיים: $p(x)\geq 0$ לכל x ממשי. הוכיחו כי ניתן לייצג אותו בתור סכום של ריבועים של פולינומים.

ב*. האם זה נכון עבור פולינום בשני משתנים?