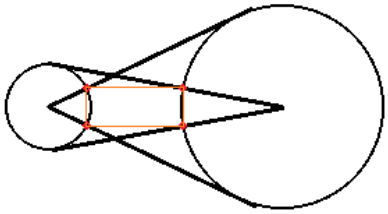
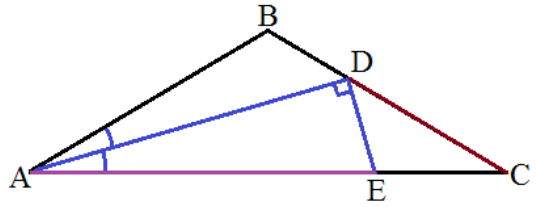
תרגיל 2



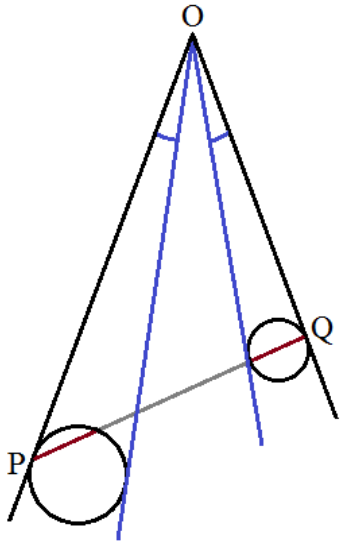
1. בציור שני מעגלים, α ו-β. שני הקטעים המשיקים ל-β מהמרכז של α חותכים את המעגל α בנקודות K ו-L. שני הקטעים המשיקים ל-α מהמרכז של β חותכים את β בנקודות M ו-N.
הוכיחו כי K, L, M, N הם קודקודים של מלבן.

פתרון. קל לראות, שביחס לקו המרכזים גם K סימטרי ל-L וגם M סימטרי ל-N.
לכן בעצם צריך להוכיח כי $KL = MN$.
נסמן A,B המרכזים של α,β בהתאמה, r_1,r_2 רדיוסיהם, נקודה U אמצע של KL, נקודה V אמצע של MN, נקודה T היא נקודת ההשקה של אחד המשיקים מ-A ל-β, נקודה S היא נקודת ההשקה של אחד המשיקים מ-B ל-α.
קל לראות כי $ATB \sim AUK$, הרי זווית A זהה, והזוויות T, U ישרות. לכן מדמיון משולשים $\frac{r_1}{AB} = \frac{UK}{r_2}$, במילים אחרות $UK = \frac{r_1 \cdot r_2}{AB}$. באופן דומה מחשבים את VM, ומקבלים כי $UK = VM$. נכפיל את שני האגפים ב-2 ונקבל: $KL = MN$.



2. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = BC$) הקטע AD הוא חוצה זווית, כאשר D על BC. נקודה E על AC נבחרה כך, שהזווית ADE ישרה. מצאו את $\frac{CD}{AE}$.

תשובה: $\frac{1}{2}$.
פתרון. יהיה M אמצע AE. אז $ME = MD = MA$, הרי המשולש ADE ישר זווית.
בפרט, MAD משולש שווה שוקיים, ולכן $\sphericalangle MDA = \sphericalangle MAD = \sphericalangle BAD$, כלומר MD מקביל ל-AB. לכן $\sphericalangle DMC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle C$, כלומר CDM משולש שווה שוקיים, $CD = DM$. אבל $AE = 2 \cdot DM = 2 \cdot CD$.



3. בתוך הזווית POQ נמצאים שני מעגלים, שמשיקים קרניים שונות של הזווית בנקודות P ו-Q. נניח כי המיתרים שנמצאים בחיתוך של הישר PQ עם שני המעגלים הן באותו האורך. הוכיחו, כי O רואה את שני המעגלים באותה זווית.

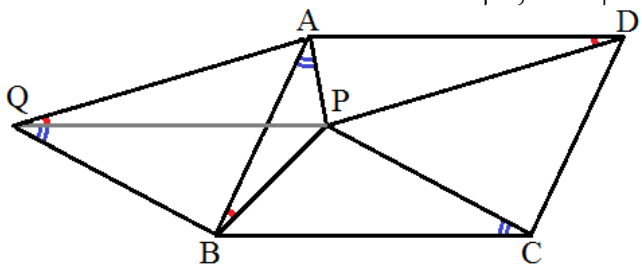
פתרון. יהי T עקב האנך מ-O על PQ. בנוסף, נניח כי PA, QB הם הקטרים של המעגלים הנתונים, והמיתרים שנוצרים בחיתוך של PQ אם המעגלים הם PU, PV.
אז המשולשים OPT, PAU דומים, הרי OP מאונך ל-PA, OT מאונך ל-PU, ו-UA מאונך ל-PT; כלומר אם נסובב משולש אחד בזווית ישרה, נקבל משולש שצלעות המתאמות

שלו מקבילות למשולש השני. לכן $\frac{UA}{OP}=\frac{PU}{OT}$. באופן דומה רואים את הדמיון של משולשים QBV, OQT ומכאן $\frac{VB}{OQ}=\frac{QV}{OT}$. אבל נתון שהמיתרים שווים, במילים אחרות $PU=QV$. לכן אם נסמן ב- R_1,R_2 את הרדיוסים

$$2\cdot\frac{R_1}{OP}=\frac{UA}{OP}=\frac{PU}{OT}=\frac{QV}{OT}=\frac{VB}{OQ}=2\cdot\frac{R_2}{OQ}.$$

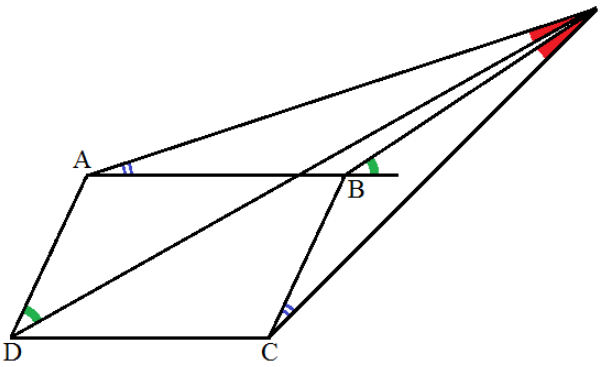
ובכן, $\frac{R_1}{OP}=\frac{R_2}{OQ}$, לכן O רואה את שני המעגלים באותה זווית.

4. א. בתוך מקבילית ABCD נמצאת נקודה P, כך ש- $\sphericalangle PAB=\sphericalangle PCB$. הוכיחו כי אז גם $\sphericalangle PBA=\sphericalangle PDA$.



ב. נסחו והוכיחו טענה דומה עבור נקודה שנמצאת מחוץ למקבילית.

פתרון. נוסיף לציור נקודה Q, כך שווקטור PQ שווה לווקטורים DA ו-CB. אז $\sphericalangle PCB=\sphericalangle PQB$, וגם $\sphericalangle PDA=\sphericalangle PQA$.

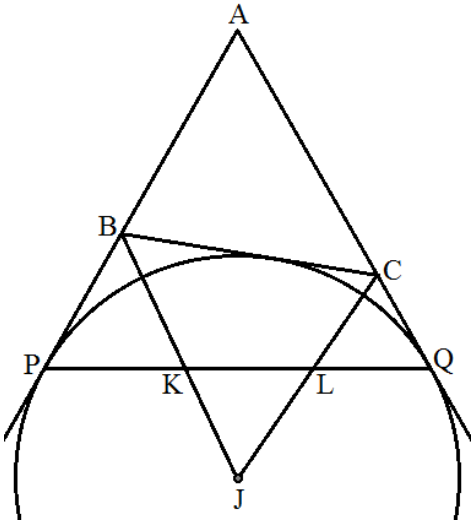


לכן הנתון הוא ש- $\sphericalangle PAB=\sphericalangle PQB$, וצריך להוכיח כי $\sphericalangle PBA=\sphericalangle PQA$. אבל שתי הטענות שקולות לכך, שהמרובע APBQ חסום.

ב. אנחנו נסתפק בציור, ונשאיר לקורא את הניסוח ואת ההוכחה, הרי לא מאוד שונה.

5. מעגל שמרכז J משיק לצלע BC של משולש ABC, וגם משיק להמשכי הצלעות AB ו-AC בנקודות P ו-Q. הישר PQ חותך את הישרים BJ, CJ בנקודות K ו-L בהתאמה.

מצאו את $\frac{KL}{BC}$, בהנחה ש- $\sphericalangle BAC=60^\circ$.



תשובה. $\frac{1}{2}$.

פתרון. קל לראות, כי BJ, CJ הם חוצי זוויות של PBC, BCQ בהתאמה.

אבל $\sphericalangle ABC+\sphericalangle ACB=120^\circ$, לכן

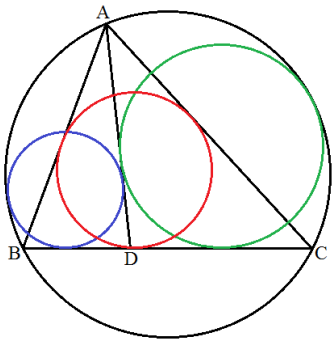
$\sphericalangle PBC+\sphericalangle BCQ=240^\circ$, לכן $\sphericalangle JBC+\sphericalangle JCB=120^\circ$, לכן $\sphericalangle BJC=60^\circ$.

נשים לב, שהמשולש APQ הוא משולש שווה-שוקיים אם זווית A של 60°, במילים אחרות משולש שווה צלעות, לכן גם הזוויות P, Q הן של 60°.

לכן $\sphericalangle KPC = 60^\circ = \sphericalangle KJC$, כלומר K, J, Q, C על מעגל אחד. אבל $\sphericalangle JQC = 90^\circ$, לכן JC הוא הקוטר של מעגל זה, לכן גם $\sphericalangle JKC = 90^\circ$.

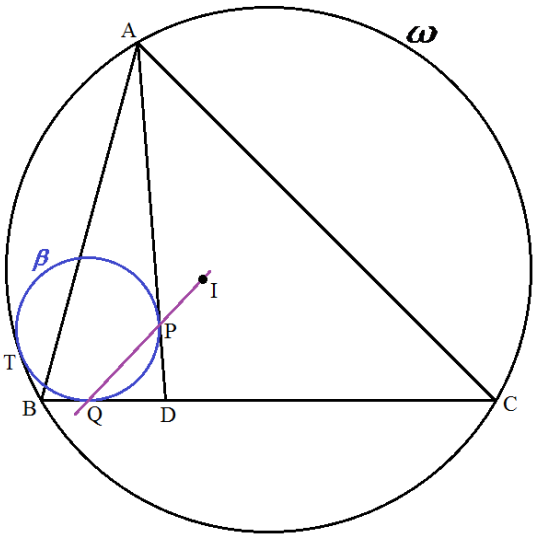
באופן דומה רואים כי BPJL מרובע שחסום במעגל שקוטרו JB, ולכן $\sphericalangle JLB = 90^\circ$.

אבל מקודם ראינו כי $\sphericalangle J = 60^\circ$, לכן המשולשים BJL, CJK הם $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, לכן $JK = \frac{1}{2}\cdot JC$, וכן $JL = \frac{1}{2}\cdot JB$. בנוסף למשולשים JKL, JCB יש זווית J משותפת, לכן המשולשים דומים עם מקדם $\frac{1}{2}$. לכן $KL = \frac{1}{2}\cdot BC$. מש"ל.



6*. על הצלע BC של משולש ABC נבחרה נקודה אקראית D. נצייר 3 מעגלים: המעגל α שחסום במשולש ABC, ושני המעגלים β, γ שמשיקים בו-זמנית לקטעים AD, BC ולמעגל החוסם. הוכיחו שהמרכזים של α, β, γ נמצאים על ישר אחד.

הערה. הטענה פורסמה לראשונה ב-1938 על ידי Victor Thebault ללא הוכחה, והייתה שאלה פתוחה מעל 30 שנה.



פתרון ראשון. נסמן ב-ω את המעגל החוסם של המשולש ABC. נניח כי β זה המעגל שמשיק ל-BD בנקודה Q, ל-AD בנקודה P, ול-AB בנקודה T. כמו כן, נסמן ב-I את מרכז המעגל החסום של משולש ABC.

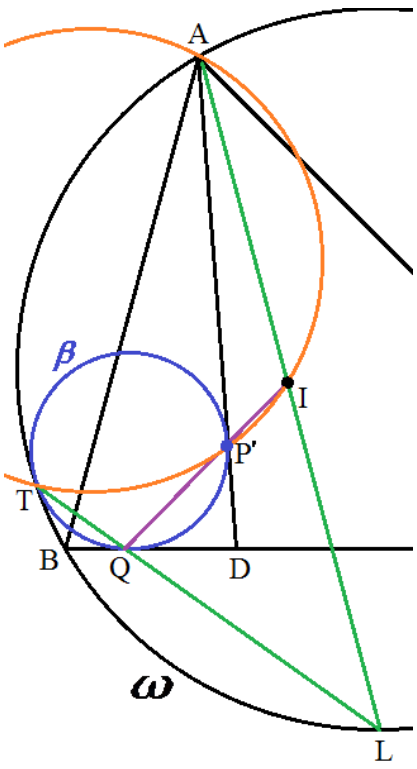
טענה 1. הנקודות P, Q, I נמצאות על ישר אחד.

הוכחה טענה 1. נסמן ב-P' את נקודת החיתוך הנוספת של IQ עם המעגל β. נסמן ב-L את הנקודה הנוספת של המעגל החוסם של המשולש ABC עם AI. מכיוון ש-AI חוצה את הזווית BAC, הנקודה L חייבת להיות באמצע הקשת BC. ניתן תמיד לסובב את הציור כך, שהקטע BC יהיה אופקי, ו-A יהיה מעל BC. אז L היא הנקודה הנמוכה ביותר של ω, כמו ש-Q היא הנקודה הנמוכה ביותר של β. קיימת הומותטיה עם מקדם חיובי ומרכז ב-T שמעבירה את ω ל-β, ולכן היא מעברה את L ל-Q, לכן T, L, Q על ישר אחד.

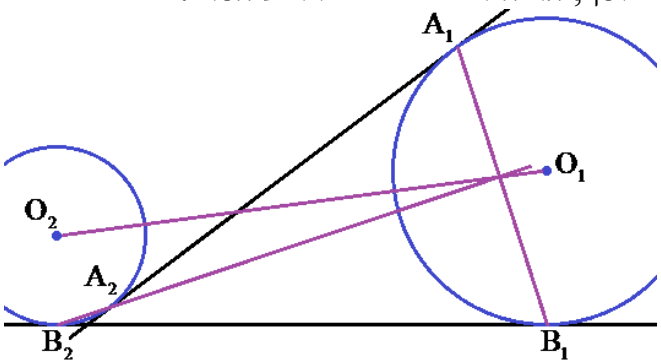
נראה כי הזוויות BQT, QP'T, TAI שוות. אכן, לפי חשבון קשתות ב-ω

$$\sphericalangle BQT = \frac{1}{2}\left(BT + CL\right) = \frac{1}{2}\left(BT + BL\right) = \frac{1}{2}TL = \sphericalangle TAI$$

ולפי חשבון קשתות ב-β, מקבלים $\sphericalangle QP'T = \frac{QT}{2} = \sphericalangle BQT$.



ובכן $\sphericalangle QP'T = \sphericalangle TAI$, לכן המרובע $TAIP'$ חסום.
לפי משפט התלתן, ודמיון משולשים LBT, LQB
מקבלים $LQ \cdot LT = LB^2 = LI^2$.
לכן גם המשולשים LQI, LIT דומים.
מכאן מתקבל שוויון זוויות: $\sphericalangle LIT = \sphericalangle LQI$.
לכן $\sphericalangle AP'T = \sphericalangle AIT = \sphericalangle TQP'$.
אבל $\sphericalangle AP'T = \sphericalangle TQP'$ בעצם אומר, ש-AP' משיק ל-β. לכן P' זה בעצם P.
בזה הוכחנו את הטענה.
בנוסף, הוכחנו כי $AIPT$ מרובע חסום.



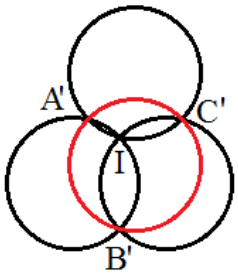
טענה 2. לשני מעגלים שמרכזיהם O_1 , O_2 העבירו משיק פנימי משותף שמשיק למעגל ראשון ב-A_1 ולשני ב-A_2, ומשיק חיצוני משותף של שמשיק למעגל הראשון ב-B_1 ולשני ב-B_2. אזי O_1O_2 , A_2B_2 , A_1B_1 נפגשים בנקודה אחת.

הוכחת טענה 2. נסמן ב-T את נקודת המפגש של A_2B_2 , A_1B_1. קל לראות שהישרים A_2B_2 , A_1B_1 מאונכים: הם מקבילים לחוצי הזוויות של הזוויות שנוצרות בין שני המשיקים. נבנה מעגל η שקוטרו A_1A_2, ומעגל ζ שקוטרו B_1B_2. אז T נמצא על ζ ועל η. דרגת O_i ביחס ל-ζ ול-η שווה לרדיוס של מעגל i. ובכן, שלוש הנקודות O_1, O_2, T נמצאות על הציר הרדיקלי של ζ ושל η, כלומר על ישר אחד.

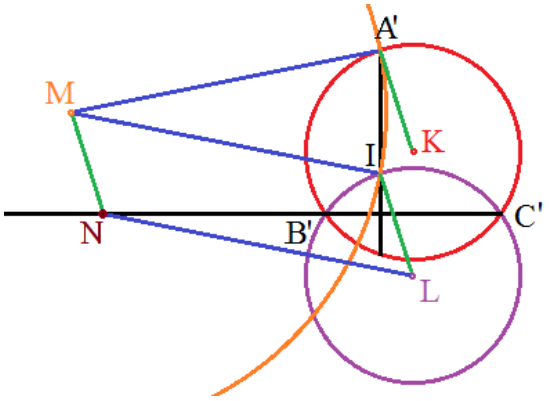
נסיים את פתרון השאלה. הישרים AD, BC הם המשיקים הפנימי והחיצוני של העגלים β,γ. כאשר נחבר את שתי נקודות ההשקה שיש על אותו המעגל, נקבל ישר שעובר דרך I לפי טענה 1. שני מעגלים נותנים שני ישרים כאלה, ו-I זו נקודת מפגש של שני הישרים, לכן I נמצא על קו המרכזים של β,γ לפי טענה 2. מש"ל.

פתרון שני (עמרי מרכוס). נבצע אינברסיה ביחס למעגל שמרכזו ב-I. לאחר האינברסיה, נקודות A, B, C תעבורנה לנקודות A', B', C' והישרים AB, BC, CA תעבורנה למעגלים $IA'B'$, $IB'C'$, $IC'A'$ שהם באותו גודל, הרי הישרים היו באותו המרחק מ-I. נתבונן בתמונה הזאת עם 3 מעגלים שווים. נגיד שהקטרים של המעגלים הם IA_1 (של $IB'C'$), ובדומה IB_1, IC_1. אז I הוא מרכז המעגל החוסם את $A_1B_1C_1$, ומצד IA' מאונך גם ל-$A'B_1$ וגם ל-$A'C_1$, לכן IA' הוא האנך האמצעי של B_1C_1. כלומר $A'B'C'$ הוא משולש האמצעים של $A_1B_1C_1$, כלומר פי 2 יותר קטן וצלעות מתאימות מקבילות. לכן

הישר IA' מאונך ליש $B'C'$, ומטענות דומות רואים כי I הוא מפגש הגבהים של $A'B'C'$. בנוסף, מכיוון שמשולשים $A'B'C'$ ו-$A'B'C_1$ חופפים, אז המעגל $A'B'C'$ הוא גם באותו גודל כמן המעגל $IA'B'$.



כעת נצייר ציור לאחר האינברסיה:



בציור יש מעגלים $A'B'C'$ (אדום בציור) שאליו עבר המעגל ABC, שמרכזו יסומן K, והמעגל $B'C'I$ שאליו עבר הישר BC (סגול בציור), שמרכזו יסומן L; הרדיוסים של שני מעגלים אלה שווים ויסומנו r_1 (קטעים ירוקים בציור). מעגל חשוב נוסף (כתום בציור) זה תמונה לאחר אינברסיה של הישר AD, מרכזו יסומן M; רדיוסו יסומן r_2. מה שמגדיר א התמונות β',γ' של מעגלים β,γ לאחר האינברסיה זה שהם צריכים להשיק בו זמנית למעגלים אדום, סגול וכתום (לא קשה להבין באיזה קשתות).

מרכז של כל מעגל זה לאחר אינברסיה, אבל הישר שמחבר את מרכז המעגל למרכז אינברסיה לא זה. לכן מספיק להוכיח, שהישר שמחבר את I למרכזים של β' ושל γ' הוא אותו ישר. אנו נוכיח טענה חזקה יותר: שלמעגלים β',γ' יש מרכז משותף, ומרכז זה הוא נקודה N, עבורה MILN מקבלית.

מכיוון שהמעגל אדום וסגול הם באותו גודל, אז ניתן להעביר אחד לשני באמצעות שיקוף ביחס לישר $B'C'$ או הזזה במאונך ל-$B'C'$. הזזה זו תעביר את K ל-L ואת A' ל-I, ולכן KA' מקביל ושווה ל-LI, לכן $ILKA'$ מקבילית. את נקודת מפגש שנייה של $A'I$ עם המעגל האדום נסמן J. הטלה של M לקטע AI חוצה אותו, הרי AMI שווה-שוקיים (הרי MA ו-MI רדיוסים של אותו מעגל). הישר $B'C'$ חוצה את IJ עקב סימטריה. לכן המרחק מ-M ל-$B'C'$ שווה למחצית $A'J$. מצד שני, גם התלה מ-K על $A'J$ חוצה אותו (הרי גם $A'KJ$ שווה-שוקיים). לכן הטלה של $A'K$ לישר AI שווה למרחק מ-M לישר. לפי הגדרה של N, הווקטורים MN, IL, $A'K$ שווים (הקטעים הירוקים בציור). לכן, היות והטלה של $A'K$ לישר AI שווה למרחק מ-M ליש $B'C'$, אז הנקודה N נמצאת על $B'C'$. זה כבר אומר שמעגל עם מרכז ב-N משיק למעגל אדום אך ורק כשהוא משיק למעגל סגול (עקב סימטריה יחסית ל-$B'C'$). המרחק מ-N לנקודות K, L שווה ל-MI שזה r_2. לכן בשביל שמעגל שמרכזו N ישיק למעגל האדום והסגול, צריך שהפרש הרדיוסים או סכום הרדיוסים יהיה שווה למרחק בין המרכזים, כלומר שרדיוס המעגל יהיה $r_2 \pm r_1$. בדיוק בשני המקרים האלה המעגל ישיק גם למעגל הכתום, הרי $MN = r_1$.

אנו משאירים כתרגיל לקורא לבדוק שהמעגלים שמרכזם ב-N משיקים למעגלים בקשתות הנכונות (שמתאימות לפנים הקטעים ולא לחלק החיצוני לפני האינברסיה).