תרגיל 21

1. א. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות $f^2(xy)=f^2(x)+f^2(y)$.

ב. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות $f^2(x+y)=f^2(x)+f^2(y)$.

פתרון. א. נציב $x=0$. נקבל $f^2(0)=f^2(0)+f^2(y)$, כלומר $f^2(y)=0$ כלומר $f(y)=0$ לכל y.

ב. נציב $x=0$. נקבל $f^2(x)=f^2(x)+f^2(0)$ כלומר $f^2(0)=0$ כלומר $f(0)=0$.
כעת נציב $y=-x$. נקבל $0=f^2(0)=f^2(x)+f^2(-x)$, לכן $f^2(x)=0$, הרי סכום שלו עם מספר אי-שלילי הוא 0. לכן $f(x)=0$ לכל x.

2. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עבורן $x\cdot\big(f(x)+f(-x)\big)+2f(-x)=0$.

פתרון. המשוואה מקשרת בין $f(x)$ ל-$f(-x)$ ולא מערבת אף ערך אחר של הפונקציה. לו היו שני משוואות שמקשרות בין $f(x)$ ל-$f(-x)$, יתכן שהיה יותר קל לפתור. אבל לא קשה להשיג משוואה נוספת, עם נציב $-x$ במקום x במשוואה:

$$(*)\qquad -x\cdot\big(f(-x)+f(x)\big)+2f(x)=0$$

ואם נחבר את המשוואה הזאת אם המשוואה המקורית נקבל

$$2f(x)+2f(-x)=0$$

לכן $f(x)+f(-x)=0$. נציב את זה במשוואה $(*)$ ונקבל $2f(x)=0$, כלומר $f(x)=0$ לכל x.

3. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ עבורן

$$f\big(m+f(n)\big)=f(m+n)+2n+1.$$

פתרון. נסמן $d=f(n)-n$, וכן $m+n=k$. אז $f(k+d)=f(k)+2n+1$. נציין, שבהינתן n, המספר d נקבע ביחידות, אבל k יכול להיות כל מספר, הרי ניתן לקחת $m=k-n$.

זאת משוואת בסגנון Cauchy, ולכן $\dfrac{f(n)-n}{2n+1}=C$ שהוא קבוע (לא תלוי ב-n). מכאן קל לראות שרק פונקציה ליניארית עשויה לפתור את המשוואה הנתונה, ואז מספיק להציב פונקציות מהצורה $f(n)=an+b$ ולבדוק עבור איזה a ו-b הן עובדות.

הסבר מפורט יותר לאלה שלא זוכרים משוואת Cauchy:
לכל s שלם קל לקבל באינדוקציה $f(k+sd)=f(k)+s(2n+1)$. כמובן, בהוכחה עבור s שלילי האינדוקציה תתקדם בכיוון ההפוך.

נניח שעבור n_1 מקבלים $d_1 = f(n_1) - n_1$ ועבור n_2 מקבלים $d_2 = f(n_2) - n_2$.
אז נקבל שלכל k שלם:

$$f(k) + d_1(2n_2 + 1) = f(k + d_1 d_2) = f(k) + d_2(2n_1 + 1)$$
$$d_1(2n_2 + 1) = d_2(2n_1 + 1)$$
$$\left(f(n_1) - n_1\right)(2n_2 + 1) = \left(f(n_2) - n_2\right)(2n_1 + 1)$$

מותר לחלק ב-$2n_i + 1$, ואז נקבל $\frac{f(n_1) - n_1}{2n_1 + 1} = \frac{f(n_2) - n_2}{2n_2 + 1}$, כלומר $\frac{f(n) - n}{2n + 1} = C$
לא תלוי ב-n. לכן $f(n) = C(2n + 1) + n = an + b$.

החלק האחרון והפשוט של הפתרון הוא להציב $f(n) = an + b$ במשוואה המקורית:

$$f\left(m + f(n)\right) = f(m + n) + 2n + 1$$
$$a\left(m + an + b\right) + b = a\left(m + n\right) + b + 2n + 1$$
$$a^2 n + ab = an + 2n + 1$$
$$\left(a^2 - a - 2\right)n = 1 - ab$$

וזה צריך להתקיים לכל n. זה יתכן אך ורק כאשר $a^2 - a - 2 = 0$ וגם $1 - ab = 0$.
למשוואה ריבועית $a^2 - a - 2 = 0$ שני פתרונות: $a = -1, 2$. אבל גם מתקיים $ab = 1$
לכן רק $a = \pm 1$ עשוי להתאים, אחרת b אינו שלם.
בשאלה אין דרישה מפורשת לכך ש-b יהיה שלם, רק לכך ש-$f(n) = an + b$ יהיה
שלם לכל n, אבל $b = f(0)$ ולכן הוא חייב להיות שלם.
לכן רק $a = -1$ מתאים, ולכן גם $b = -1$ והפונקציה היחיד שמתאימה היא

$$f(n) = -(n + 1)$$

קל להציב ולבדוק שהפונקציה אכן מתאימה, אם כי כבר בעצם עשינו את זה בחלק האחרון
של הפתרון.

4. למצוא את כל הפונקציות $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ כל שלכל $a, b, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $f(a) - f(b)$
מתחלק ב-n אם ורק אם $a - b$ מתחלק ב-$f(n)$.

תשובה. $f(n) \equiv n$ או $f(n) \equiv 1$.
פתרון. נוכיח כי $f(n) \le n$ לכל $n \ge 1$. אכן, נניח כי $f(m) > m$. אז מבין

$$f(1), f(2), \ldots, f(m + 1)$$

ישנם שני מספרים שנותנים אותה שארית בחלוקה ל-m. ואז קיימים k, ℓ כך ש-
$1 \le k < \ell \le m + 1$, עבורם $f(\ell) - f(k)$ מתחלק ב-m, כלומר $\ell - k$ חייב להתחלק
ב-$f(m)$. אבל $1 \le \ell - k \le m < f(m)$, סתירה.

מהטענה שהוכחנו בפרט נובע כי $f(1)\le 1$ כלומר $f(1)=1$.
ברור שהפונקציה $f(n)=n$ מקיימת את כל התנאים. נניח שהפונקציה שלנו היא פונקציה אחרת, אז $f(m)<m$ עבור m מסוים. נבחר את ה-m הקטן ביותר מסוג זה.

אם $m=2$ אז $f(2)-f(1)=1$ מתחלק בכל מספר n, ולכן $f(n)$ מתחלק ב-$2-1$ לכל n, ואז $f(n)=1$ לכל n.

נניח כי $m>2$. אז לכל $1\le k<m$ מתקיים $f(k)=k$ כי כך בחרנו את m.
נסמן $\ell=f(m)$, הוא גם באותו תחום, הרי $\ell<m$. לכן $f(\ell)=\ell=f(m)$.
לכן $f(m)-f(\ell)=0$ מתחלק בכל מספר טבעי. לכן $m-\ell$ מתחלק ב-$f(n)$ לכל n טבעי. לכן $f(n)\le m-\ell$ לכל n, אבל $f(m-1)=m-1$, לכן $m-1\le m-\ell$ כלומר $\ell\le 1$. אז $m-1=2-1$ מתחלק ב-$f(m)$, לכן $f(2)-f(1)$ מתחלק ב-m, אבל $m>2$ ולכן קיבלנו סתירה.

5. למצוא שלשות של פונקציות $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, שמקיימות
$$f\left(h\left(g(x)\right)+y\right)+g\left(z+f(y)\right)=h(y)+g\left(y+f(z)\right)+x$$
לכל x,y,z ממשיים.

פתרון. נציב $y=z$ ונקבל
$$(*)\qquad f\left(h\left(g(x)\right)+y\right)=h(y)+x$$
נחסיר בין המשוואה הנתונה למשוואה שקיבלנו (שגם היא מתקיימת לכל x,y) ונקבל
$$(**)\qquad g\left(z+f(y)\right)=g\left(y+f(z)\right)$$
נציב $y=0$ ב-$(*)$ ונקבל $f\left(h\left(g(x)\right)\right)=h(0)+x$. עבור ערכים שונים של x האגף הימני שונה, ולכן g חח"ע. לכן במשוואה $(**)$ הערכים שהציבו ב-g שונים, ולכן
$$z+f(y)=y+f(z)$$
$$f(y)-y=f(z)-z$$
כלומר $f(y)-y=C$ שאינו תלוי ב-y.
במילים אחרות $f(y)=C+y$. מכאן המשוואה $(**)$ ברורה וכבר לא צריך אותה. אבל כל המתונים שקיבלנו הם $(*)$ ו-$(**)$, הרי המשוואה שנתונה בשאלה היא הסכום של $(*)$ ו-$(**)$. לכן לאחר שקיבלנו $f(y)=C+y$ מספיק להתמקד רק במשוואה $(*)$ בצורה:
$$C+h\left(g(x)\right)+y=h(y)+x$$
$$C+h\left(g(x)\right)-x=h(y)-y$$

אגף שמאל אינו תלוי ב- x, ואגף ימין אינו אינו תלוי ב- y, לכן שני האגפים שווים לערך קבוע שאינו תלוי לא ב- x שנסמן אותו ב- D. מכאן

$$h(y)-y=D$$
$$h(g(x))-x=D-C$$

שני משוואות האחרונות גם גוררת את כל התנאים שהיו קודם.
מכאן

$$h(y)=D+y$$
$$h(g(x))=D-C+x$$

בעזרת המשוואה הלפני אחרונה ניתן לפשט את המשוואה האחרונה:

$$D+g(x)=D-C+x$$
$$g(x)=x-C$$

ובכן התשובה היא:

$$\begin{cases} f(x)=x+C \\ g(x)=x-C \\ h(x)=x+D \end{cases}$$

כאשר $C,D\in\mathbb{R}$ פרמטרים כלשהם.

6. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}$ המקיימות $f\left(\frac{f(x)+a}{b}\right)=f\left(\frac{x+a}{b}\right)$,
לכל $x\in\mathbb{Q}$, $a\in\mathbb{Z}$, ו- $b\in\mathbb{Z}_{>0}$.

תשובה. פונקציות תקרה ורצפה $\lceil x\rceil$, $\lfloor x\rfloor$ ופונקציות קבועות.

פתרון. נציב במשוואה הנתונה $b=1$, ונקבל $f(f(x)+a)=f(x+a)$.
אם נציב $a=z-f(x)$ נקבל $f(z)=f(z+x-f(x))$.
ניקח כעת x להיות מספר שלם כלשהו. אז $x-f(x)$ שלם. אם $x-f(x)\neq 0$ עבור x מסוים, אז הפונקציה מחזורית עם מחזור שלם $x-f(x)$. יש 2 אפשרויות:

I. f מחזורית עבור שלמים. יהי c אורך המחזור. נציב במשוואה הנתונה

$$x=kc\ ,\ a=0\ ,\ b=tc$$

ונקבל $f\left(\frac{f(0)}{tc}\right)=f\left(\frac{f(kc)}{tc}\right)=f\left(\frac{kc}{tc}\right)=f\left(\frac{k}{t}\right)$.

אבל אז $f\left(\frac{k}{t}\right)$ אינו תלוי ב- k. אבל לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$ ניתן לבחור מכנה משותף, לכן $f(\alpha)=f(\beta)$, לכן f קבועה.

קל לבדוק גם שכל פונקציה קבוע מקיימת את המשוואה המקורית.

II. במקרה שנשאר $a=f(a)$ לכל $a\in\mathbb{Z}$. נציב שוב במשוואה הנתונה $b=1$, ונקבל

$$f(x)+a=f\big(f(x)+a\big)=f(x+a) \qquad (1)$$

הרי גם $f(x)+a$ שלם.

טענה. $$\left\lfloor\frac{x+a}{b}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor+a}{b}\right\rfloor,\ \left\lceil\frac{x+a}{b}\right\rceil=\left\lceil\frac{\lceil x\rceil+a}{b}\right\rceil$$

לכל $b\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{Z}$, $x\in\mathbb{R}$.

נשאיר את הוכחת הטענה כתרגיל לקוראים. מהטענה נובע שפונקציות תקרה ורצפה מקיימות את הדרישות של השאלה.

נציג שני דרכים לסיים את הפתרון:

דרך ראשונה. נסמן $z=1-2f\left(\frac{1}{2}\right)$. אז לפי (1)

$$0=f\left(\tfrac{1}{2}\right)-f\left(\tfrac{1}{2}\right)=f\left(\tfrac{1}{2}-f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{1-2f\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\right)=f\left(\frac{z}{2}\right)$$

אנו נראה שאם $z>0$ אז $f(x)\equiv\lfloor x\rfloor$, ואחרת $f(x)\equiv\lceil x\rceil$.

מקרה ראשון. נציב במשוואה הנתונה $b=z$, $a=0$, $x=\frac{z}{2}$ ונקבל

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{f\left(\frac{z}{2}\right)}{z}\right)=f\left(\frac{0}{z}\right)=f(0)=0.$$

מכאן לפי (1) מקבלים $f(a)=\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor$ לכל המספרים השלמים (ל-a זוגי ידענו את זה גם קודם).

אם נציב $2x$ במקום x, במקרה $a=0$, $b=2$ במשוואה הנתונה נקבל

$$\left\lfloor\frac{f(2x)}{2}\right\rfloor=f\left(\frac{f(2x)}{2}\right)=f(x)$$

ומכאן קל לראות ש-

$$f(x)=\left\lfloor\frac{f(2x)}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{f(4x)}{2}\right\rfloor}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{f(4x)}{4}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{f(8x)}{4}\right\rfloor}{2}\right\rfloor=\ldots=\left\lfloor\frac{f\left(2^r x\right)}{2^r}\right\rfloor$$

לפי הטענה.

אם נציב bx במקום x ו-$a=0$ במשוואה הנתונה נקבל $f(x)=f\left(\frac{f(bx)}{b}\right)$.

בפרט אם $x=\frac{p}{2^r q}$, כאשר $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{Z}_{>0}$, $r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, ובנוסף נניח להי"כ ש-q אי-זוגי, נקבל

$$f\left(\frac{p}{2^r q}\right)=\left\lfloor\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{2^r}\right\rfloor$$

בנוסף, נניח ש-m הוא הסדר של 2 מודולו q, כלומר 2^m-1 מתחלק ב-q, ואז

$$\left\lfloor\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{2^r}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{f\left(\frac{2^{md}p}{q}\right)}{2^{r+md}}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{f\left(\frac{\left(2^{md}-1\right)p+p}{q}\right)}{2^{r+md}}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{\frac{2^{md}-1}{q}\cdot p+f\left(\frac{p}{q}\right)}{2^{r+md}}\right\rfloor=$$

$$=\left\lfloor\frac{p}{q2^r}+\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{p}{q}}{2^{r+md}}\right\rfloor$$

ניתן לבחור d להיות מספר טבעי גדול כרצוננו, ואז המחובר האחרון יהיה קטן כרצוננו.

ובכן, לכל $x\in\mathbb{Q}$ שאינו שלם, ניתן לרשום $x=\frac{p}{q\cdot 2^r}$ כאשר q אי-זוגי, ואז

$$f(x)=f\left(\frac{p}{2^r q}\right)=\left\lfloor\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{2^r}\right\rfloor=\left\lfloor x+\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{p}{q}}{2^{r+md}}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$$

ועבור שלמים אנחנו ידענו את זה גם קודם.

מקרה שני. $z\leq 0$. מכיוון ש-$z=1-2f\left(\frac{1}{2}\right)$ הוא אי-זוגי, בעצם אפילו $z<0$.

אם נציב במשוואה הנתונה $b=-z$, $a=0$, $x=\frac{z}{2}$ נקבל $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

אז לפי (1), $f(a)=\left\lceil\frac{a}{2}\right\rceil$ לכל המספרים השלמים. מכאן ההוכחה היא כמעת זהה להוכחה של המקרה הראשון, רק שצריך בכל מקום להפוך רצפה לתקרה.

דרך שנייה. אנחנו כבר יכולים להניח, ש-$f(a)=a$ וגם ש-$f(x+a)=f(x)+a$ לכל $a\in\mathbb{Z}$. נסמן $S=\{x\in\mathbb{Q}\mid f(x)=0\}$ (קבוצת האפסים של f). קל לראות, שלכל $x\in\mathbb{Q}$ קיים ויחיד $a\in\mathbb{Z}$ עבורו $f(x+a)=0$.

ניקח $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{Z}_{>0}$, עבורם $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$. נוכיח ש-$f\left(\frac{p}{q+1}\right)=0$.

אם נציב במשוואה הנתונה $x=\frac{p}{q}$, $a=p$, $b=q+1$ נקבל

$$f\left(\frac{p}{q+1}\right)=f\left(\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)+p}{q+1}\right)=f\left(\frac{\frac{p}{q}+p}{q+1}\right)=f\left(p\cdot\frac{\frac{q+1}{q}}{q+1}\right)=f\left(\frac{p}{q}\right)=0.$$

מכאן מקבלים שאם $0<x<y$ מספרים רציונאליים, כלומר $y=\frac{r}{s}$, $x=\frac{p}{q}$, ואם בנוסף $f(y)=0$, אז גם $x=0$, הרי

$$0=f\left(\frac{r}{s}\right)=f\left(\frac{rp}{sp}\right)=f\left(\frac{rp}{sp+1}\right)=f\left(\frac{rp}{sp+2}\right)=\ldots=f\left(\frac{rp}{rq}\right)=f(x)$$

טיעון דומה עובד עבור $0>x>y$.

מכאן מקבלים שאין ב-S אף נציג $s\in S$ עבורו $s>1$ הרי אז גם

$$f(s-1)=f(s)=0$$

וזה לא יתכן. באופן דומה, אין ב-S אף מספר עבורו $s<-1$ מסיבה דומה.

לכן $S\subset(-1,1)$. נסמן $\alpha=\sup S$. עבור $\alpha=0$ מקבלים פונקצית רצפה, ועבור $\alpha=1$ מקבלים פונקצית תקרה. נניח כי $\alpha\in(0,1)$. מספר זה קיים ונמצא בתחום $[0,1]$. נשים לב כי $f(x)=0$ עבור $x\in(0,\alpha)\cap\mathbb{Q}$ ו-$f(x)=1$ עבור $x\in(\alpha,1)\cap\mathbb{Q}$.

נסמן ב-K אם המספר הטבעי עבורו $K\alpha<1\le(K+1)\alpha$. קל לראות כי $\alpha<\frac{1+\alpha}{K+1}$, ולכן אפשר למצוא מספר רציונאלי $x\in\left(\alpha,\frac{1+\alpha}{K+1}\right)$. נסמן גם $y=(K+1)x-1$.

אז קל לראות ש-$y<\alpha$. נציב במשוואה מקורית y במקום x, $a=1$, $b=K+1$ ונקבל

$$f\left(\frac{1}{K+1}\right)=f\left(\frac{f(y)+1}{K+1}\right)=f\left(\frac{y+1}{K+1}\right)=f(x)=1$$

אבל $\alpha \le \frac{1}{K+1}$, לכן זה אפשרי רק את $\alpha=\frac{1}{K+1}$ ובנוסף $f(\alpha)=0$.

אבל אז $f\left(\frac{1}{K+1}\right)=f\left(\frac{f(\alpha)+0}{K+1}\right)=f\left(\frac{\alpha+0}{K+1}\right)=f\left(\frac{1}{(K+1)^2}\right)=1$,

וזה לא יתכן.