<u>תרגיל 21</u>

סימונים: $\mathbb{Z}_{>0}$ קבוצת השלמים החיוביים, $\mathbb{Z}$ קבוצת כל השלמים,
$\mathbb{Q}$ קבוצת מספרים רציונאליים, $\mathbb{R}$ קבוצת מספרים ממשיים.

1. א. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות $f^2(xy)=f^2(x)+f^2(y)$.
ב. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות $f^2(x+y)=f^2(x)+f^2(y)$.

2. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עבורן $x\cdot\big(f(x)+f(-x)\big)+2f(-x)=0$.

3. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ עבורן
$f\big(m+f(n)\big)=f(m+n)+2n+1$.

4. למצוא את כל הפונקציות $f:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$ כל שלכל $a,b,n\in\mathbb{Z}_{>0}$, $f(a)-f(b)$ מתחלק ב-n אם ורק אם $a-b$ מתחלק ב-$f(n)$.

5. למצוא שלשות של פונקציות $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, שמקיימות
$$f\big(h\big(g(x)\big)+y\big)+g\big(z+f(y)\big)=h(y)+g\big(y+f(z)\big)+x$$
לכל x,y,z ממשיים.

6. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}$ המקיימות $f\left(\frac{f(x)+a}{b}\right)=f\left(\frac{x+a}{b}\right)$,
לכל $x\in\mathbb{Q}$, $a\in\mathbb{Z}$ ו-$b\in\mathbb{Z}_{>0}$.