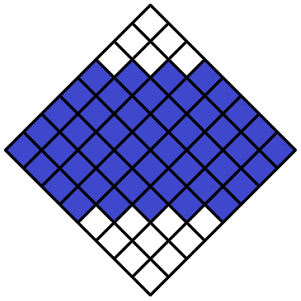
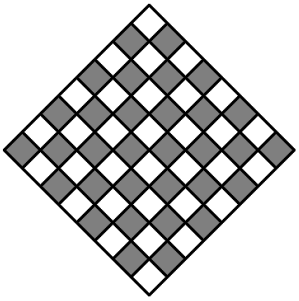
תרגיל 20

1. נתון לוח משבצות 8×8 שכל המשבצות שלו לבנות. מסובבים אותו ב-45^o, כך שיש לו 15 אלכסונים אופקיים ו-15 אלכסונים אנכיים. יוסי צובע 8 מהאלכסונים האופקיים בכחול. אלכסון אנכי נקרא טוב, אם יש בו יותר משבצות כחולות מאשר לבנות.
מה המספר המקסימלי של אלכסונים אנכיים טובים שמסוגל ליצור יוסי?





תשובה 14 (כולם חוץ מ-1).
פתרון. הגיוני לצבוע את האלכסונים היותר גדולים קודם כל,כלומר כמה שיותר קרובים לאמצע. בצורה כזאת מקבלים דוגמה בציור השמאלי. במקרה זה, באלכסון האנכי במרכז יש אותה כמות של כחולים ולבנים, אבל בכל האלכסונים האנכיים האחרים יש רוב כחול.

נשאר רק לבדוק, האם יתכן שכל האלכסונים יהיו טובים. בשביל זה נדמיין, שהלוח צבוע צביעת שח, כאשר האלכסון האנכי המרכזי יהיה לבן. על מנת שהאלכסון המרכזי יהפוך לטוב, צריך לצבוע בכחול לפחות 5 אלכסונים לבנים אופקיים. אבל אז נוכל לצבוע בכחול לכל היותר 3 אלכסונים שחורים אופקיים. אבל יש אלכסונים שחורים אנכיים של 7 משבצות (אלה שסמוכות למרכז). אם נצבע רק 3 אלכסונים שחורים אופקיים בכחול, נוכל בכל אחד משני האלכסונים האלה לצבוע לכל היותר 3 משבצות, אבל 3 מתוך 7 זה לא רוב. לכן במקרה כזה, כאשר האלכסון האנכי המרכזי הוא טוב, בהכרח נשארים לפחות שני אלכסונים לא טובים (אלה שלידו).

2. הוכיחו כי $\sum_{k=3}^{n-3}\binom{k}{3}\cdot\binom{n-k}{3}=\sum_{k=2}^{n-4}\binom{k}{2}\cdot\binom{n-k}{4}$.

פתרון. אנחנו נוכיח ששני האגפים של הזהות שווים ל-$\binom{n+1}{7}$, כלומר מספר הדרכים לבחור 7 מספרים מבין $\{1,2,3,...,n+1\}$.

נספור את $\binom{n+1}{7}$ בשתי דרכים.

דרך ראשונה: קודם נבחר את המספר האמצעי, שיסומן $k+1$. אחר כך מבין k המספרים יותר קטנים צריך לבחור שלושה, ומבין $n-k$ מספרים שנמצאים אחריו צריך לבחור גם שלושה, את זה אפשר לעשות ב- $\binom{k}{3}\cdot\binom{n-k}{3}$ דרכים. צריך לסכם על כל k אפשרי, ומקבלים נוסחה באגף השמאלי.
דרך שנייה: קודם נבחר דווקא את האיבר השלישי, שנקרא לו $k+1$. אחר-כך צריך לבחור מבין k המספרים יותר קטנים צריך לבחור שניים, ומבין $n-k$ מספרים

שנמצאים אחריו צריך לבחור ארבעה, ואת זה ניתן לעשות ב-$\binom{k}{2}\cdot\binom{n-k}{4}$ דרכים.
מכיוון שיש הרבה אפשרויות ל-k, צריך לסכם על כל האפשרויות הקיימות, וזה נותן בדיוק את האגף הימני.
ובכן, קיבלנו את שני האגפים באמצעות זה שחישבנו מספר מסוים בשתי דרכים שונות, ולכן הם שווים.

הערה. יש גם פתרון עם פונקציות יוצרות: $\sum_k \binom{k}{\ell}\cdot x^k = \frac{1}{(1-x)^{\ell+1}}$.

3. בעיר מסוימת, כל תושב מכיר לפחות 30% מהתושבים. התושב ילך לבחירות, אם ורק אם הוא מכיר את אחד המועמדים. הוכיחו שניתן לערוך בחירות לרשות העיר עם שני מועמדים בלבד, כך שרוב התושבים יצביעו בבחירות.

פתרון ראשון. ניקח תושב כלשהו, נגיד נקרא לו יוסי, והוא יהיה מועמד ראשון.
תהיה F קבוצת כל האנשים שלא מכירים אותו, ואת הגודל שלה נסמן f.
נסמן ב-n את כמות האנשים בעיר. אז לפי נתון $f \le \frac{7}{10}n$, כלומר F היא לא יכולה להיות יותר גדולה מ-70% מהאוכלוסיה.
נבקש מכל בן-אדם ב-F להכין רשימה של אנשים שהוא מכיר. כל אחד יכתוב לפחות 30% מתושבי מהעיר, כלומר $\frac{3}{10}n$. סה"כ ברשימות אלו יופיעו $\frac{3}{10}n\cdot f$ שמות, ולכן שם אחד יופיע לפחות $\frac{3}{10}f$ פעמים (הרי יש בסה"כ n שמות שקיימים). ניקח את האיש שרשמו את שמו הכי הרבה פעמים, נקרא לו שלומי. הוא יהיה המועמד השני.
יש לנו $n-f$ אנשים שיוסי מכיר, ועוד לפחות $\frac{3}{10}f$ אנשים נוספים ששלומי מכיר, לכן לבחירות יגיעו לפחות $n-f+\frac{3}{10}f = n-\frac{7}{10}f$. כלומר יבריזו בבחירות לכל היותר
$$\frac{7}{10}f \le \frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot n = \frac{49}{100}n < \frac{1}{2}n$$
כלומר פחות מחצי אוכלוסיה.

פתרון שני. אפשר לנסח את אותו הדבר לא באמצעות ספירה, אלה במושגי הסתברות.
ניקח את יוסי, לא מכירים אותו בסיכוי $\frac{7}{10}$. מבין אלה שלא מכירים אותו, כל אחד לא מכיר בן אדם אקראי אחר בסיכוי $\frac{7}{10}$, לכן אם ניקח את שלומי שהוא לא פחות טוב מאיש סטטיסטי ממוצעי (ויש כזה) הסיכוי לא להכיר אותו לאלה שלא מכירים את יוסי הוא $\frac{7}{10}$.
לכן הסיכוי שלא מכירים לא את יוסי ולא את שלומי הוא לכל היותר $\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{49}{100} < \frac{1}{2}$, לכן רוב האנשים יגיעו לבחירות.

4. ברשות מחוקקת של מדינה זרה יש 1600 חברים, שמהם נוצרו 16000 ועדות, 80 אנשים בכל ועדה. הוכיחו שיש שתי וועדות עם לפחות 4 חברים משותפים.

פתרון. לשם קיצור נסמן $K=16000$ כמות הועדות, ו-$n=1600$ כמות החברים, ובכל ועדה $m=80$ חברים. נניח שחבר מספר i שייך ל-k_i ועדות.

ננסה להעריך בשתי דרכים את הצירופים {שני חברים , ועדה} כך שוועדה מכילה את שני החברים. המספר של צירופים כאלה יסומן V.

דרך ראשונה: לחבר מספר i אז יש $\frac{k_i(k_i-1)}{2}$ זוגות ועדות שכוללות אותו. אם נספור את כל זוגות הועדות עם חבר משותף נקבל $V=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i(k_i-1)}{2}$.

דרך שנייה: שלכל שתי ועדות שמכילות אותו יש לכל היותר 3 חברים משותפים, שמהם אפשר ליצור 3 זוגות. יש $\frac{K(K-1)}{2}$ זוגות של ועדות, ולכן $V\le\frac{K(K-1)}{2}$.

משתי הגישות מתקבל אי-שוויון $\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i(k_i-1)}{2}\le\frac{K(K-1)}{2}$.

אם ננעלה בריבוע את אי-השוויון בין ממוצע ריבועי לממוצע חשבוני, נקבל

$$\frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}k\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}k_i^2$$

לכן

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}k_i\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}k_i^2-\sum_{i=1}^{n}k_i\right)\le\frac{3K(K-1)}{2}.$$

בעצם, $\sum_{i=1}^{n}k_i$ זה כמות של זוגות {חבר, ועדה} כך שחבר שייך לוועדה, שספרו לפי חברים. אבל ניתן לספור את זה גם לפי ועדות, ונקבל סכום הגדלים של כל הוועדות. במקרה שלנו יש K ועדות שכולן בגודל m, לכן $\sum_{i=1}^{n}k_i=mK$, כלומר ניתן לרשום את אי-השוויון שרשמנו בצורה

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}(mK)^2-mK\right)\le\frac{3K(K-1)}{2}$$

$$\frac{m^2K}{n}-m\le3(K-1)$$

$$\left(\frac{m^2}{n}-3\right)K\le m-3$$

$$K\le\frac{m-3}{\frac{m^2}{n}-3}=\frac{77}{\frac{80^2}{1600}-3}=\frac{77}{4-3}=77$$

ובכן, יש לכל היותר 77 ועדות, וזה הרבה יותר גדול מ-16000 בניגוד לנתון.

5. בלוח 999×999, משבצות מסוימות נצבעו בלבן והאחרות באדום. יהי Γ מספר השלשות $(A\ ,\ B\ ,\ C)$ של משבצות, המקיימות בו-זמנית את התנאים הבאים:

(i) A ו-B באותה שורה,

(ii) B ו-C באותה עמודה,

(iii) A ו-C לבנות, B אדומה.

מהו הערך הגדול ביותר האפשרי של Γ ?

פתרון. נניח כי בשורה מספר i יש a_i משבצות לבנות ובעמודה מספר j יש b_j משבצות לבנות. אז משבצת אדומה שנמצאת בשורה i ובעמודה j משתתפת בתור משבצת b ב- $a_i\cdot b_j$ שלשות שמספרות. לכן ניתן לכתוב נוסחא אדומה

$$\Gamma=\sum_{\substack{(i,j)\\ \text{אדום}}}a_i\cdot b_j$$
ה

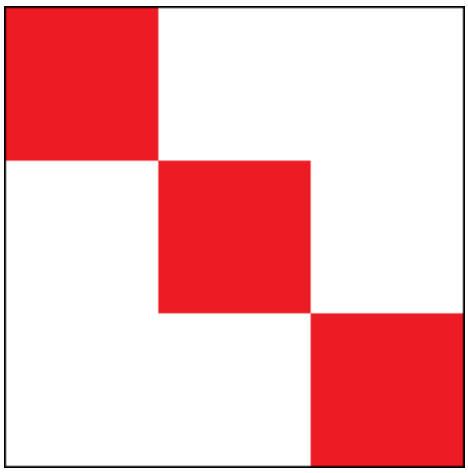
נשתמש באי-שוויון פשוט: $a_i\cdot b_j\le\frac{1}{2}\left(a_i^2+b_j^2\right)$. ואז נקבל

$$\Gamma=\sum_{\substack{(i,j)\\ \text{האדום}}}a_i\cdot b_j\le\frac{1}{2}\sum_{\substack{(i,j)\\ \text{האדום}}}a_i^2+\frac{1}{2}\sum_{\substack{(i,j)\\ \text{אדום}}}b_j^2=\sum_i\left(999-a_i\right)a_i^2+\sum_j\left(999-b_j\right)b_j^2$$
ה

נשים לב, השוויון מתקבל כאשר $a_i=b_j$ לכל משבצת אדומה (i,j).

נשתמש שוב באי-שוויון הממוצעים: $\sqrt[3]{\left(999-x\right)\left(\frac{x}{2}\right)^2}\le\frac{999-x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}{3}=333$, והשוויון מתקיים כאשר $999-x=\frac{x}{2}$. לכן גם $\left(999-x\right)x^2\le 4\cdot 333^3$, והשוויון מתקיים כאשר $x=333$. נשתמש באי-שוויון זה:

$$\Gamma\le\sum_{i=1}^{999}\left(999-a_i\right)a_i^2+\sum_{j=1}^{999}\left(999-b_j\right)b_j^2\le 2\cdot 999\cdot 4\cdot 333^3$$



בשביל שיתקיים השוויון, בנוסף על תנאי שהיה ש- $a_i=b_j$ לכל משבצת אדומה (i,j), צריך להתקיים גם כי $a_i=333$ לכל i וגם $b_j=333$ לכל j. ובכן, אם $a_i=333=b_j$ לכל i ו- j, אז נקבל $\Gamma=2\cdot 999\cdot 4\cdot 333^3$, ובכל מצב אחר נקבל $\Gamma<2\cdot 999\cdot 4\cdot 333^3$.

דוגמה של צביעה, שמשיגה שוויון בציור.

דוגמה אחרת מתקבלת מצביעת 333 אלכסונים מקבילים על טורוס.

ניתן לנסות לכתוב את המספר שמצאנו בצורות אחרות, למשל 295112887704 או $\frac{3}{2}\cdot 666^4$.

6. לכנס בנושא "שלום בין כלבים לחתולים" מגיעים מספר כלבים וחתולים. בכל יום, מארגנים ישיבה שבה מבקשים מחתול אחד, או משני חתולים, או מכלב אחד, או משני כלבים לשאת נאום (אסור שכלב וחתול ינאמו באותו יום). לפי דעת מארגני הכנס אם מישהו ישמע נאום של מישהו אחר, הם יהיה חברים לנצח. המטרה של מארגני הכנס היא שבסופו של דבר כל כלב יהיה חבר של כל חתול. מה שמקשה על השגת המטרה, זה שאף אחד לא מסכים להגיע ליותר מאשר 6 ישיבות, לא משנה האם הוא נואם או מקשיב. האם ניתן להשיג את מטרת הכנס, אם מוזמנים אליו

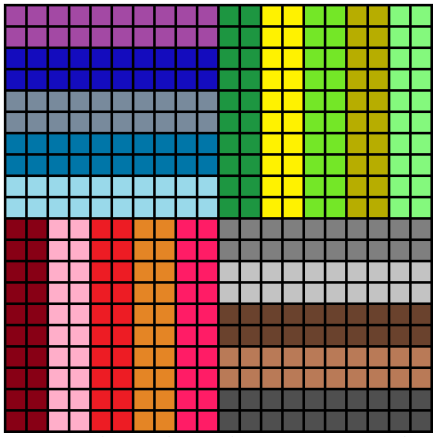
א. 20 חתולים ו-20 כלבים?

ב. 20 חתולים ו-21 כלבים?

ג. 21 חתולים ו-21 כלבים, אבל החתולים מסכימים להגיע אפילו ל-7 ישיבות כל אחד (וכל כלב מוכנים להגיע ל-6 ישיבות לכל היותר, כמו קודם) ?

הערה. סעיף ב' שאלה זאת היא גרסה קצת יותר קשה של שאלה שהופיע באולימפיאדה בינלאומית ב-2001 בניסוח הבא:

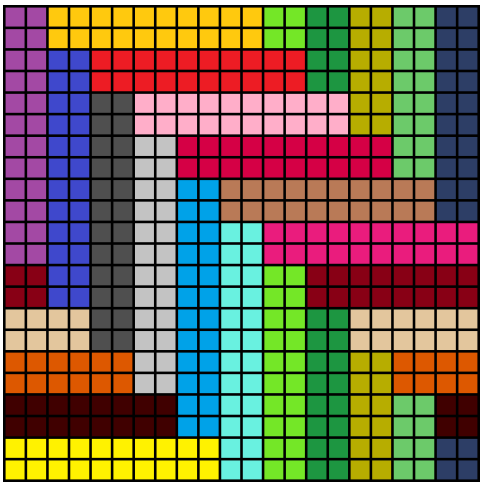
21 בנים ו-21 בנות השתתפו בתחרות מתמטית. כל אחד\אחת פתר\ה לפחות 6 שאלות. עבור כל זוג של בן ובת, יש שאלה ששניהם פתרו. הראו שיש שאלה שפתרו אותה לפחות 3 בנות ולפחות 3 בנים.



פתרון. א. בציור כל צבע מסמן ישיבה; כל שורה מסמנת חתול וכל עמודה מסמנת כלב. כל לראות שבכל שורה ובכל עמודה יש רק 6 צבעים, וכל צבע מתחבר רק לשתי שורות או לשתי עמודות.

ב. כל חתול מוכן להקשיב רק ב-5 ישיבות (אם הוא יקשיב 6 פעמים, הוא יתיידד רק עם 12 כלבים וזה לא מספיק). לכן חתול מסוגל לשמוע רק 10 כלבים מדברים, לכן הוא צריך להרצות ל-11 כלבים. לכן רוב הקשרים בין חתולים לכלבים יוצרו בזכות זה שהכלבים יקשיבו לחתולים ולא בזכות זה שהחתולים יקשיבו לכלבים (כי ככה זה לכל חתול).

לכן חייב להיות כלב, שמתיידד עם רוב החתולים בזכות הנאומים שהוא שומע ולא בזכות הנאום שלו. לכן הוא חייב להתחבר ל-11 חתולים בסכות הנאומים שהוא שומע. לכן הוא חייב לשמוע ב-6 ישיבות לכל היותר וכבר לא יהיה לו אפשרות לנאום, וכך הוא יתחבר ל-12 חתולים בלבד.



ג. בציור כל צבע מסמן ישיבה; כל שורה מסמנת חתול וכל עמודה מסמנת כלב. כל לראות שבכל שורה ובכל עמודה יש רק 7 צבעים, ובכל עמודה יש 6 צבעים.

בדוגמה שלנו יש 22 שורות ו-22 עמודות; זאת אומרת שיש 22 חיות מכל סוג; אבל זאת בעצם בעיה יותר קשה, שמכסה את המקרה של 21×21, הרי תמיד ניתן לשלוח חתול אחד וכלב אחד הביתה.