תרגיל 20

1. נתון לוח משבצות 8×8 שכל המשבצות שלו לבנות. מסובבים אותו ב-45^{o}, כך שיש לו 15 אלכסונים אופקיים ו-15 אלכסונים אנכיים. יוסי צובע 8 מהאלכסונים האופקיים בכחול. אלכסון אנכי נקרא טוב, אם יש בו יותר משבצות כחולות מאשר לבנות.
מה המספר המקסימלי של אלכסונים אנכיים טובים שמסוגל ליצור יוסי?

2. הוכיחו כי $\sum_{k=3}^{n-3}\binom{k}{3}\cdot\binom{n-k}{3}=\sum_{k=2}^{n-4}\binom{k}{2}\cdot\binom{n-k}{4}$.

3. בעיר מסוימת, כל תושב מכיר לפחות 30% מהתושבים. התושב ילך לבחירות, אם ורק אם הוא מכיר את אחד המועמדים. הוכיחו שניתן לערוך בחירות לרשות העיר עם שני מועמדים בלבד, כך שרוב התושבים יצביעו בבחירות.

4. ברשות מחוקקת של מדינה זרה יש 1600 חברים, שמהם נוצרו 16000 ועדות, 80 אנשים בכל ועדה. הוכיחו שיש שתי וועדות עם לפחות 4 חברים משותפים.

5. בלוח 999×999, משבצות מסוימות נצבעו בלבן והאחרות באדום. יהי Γ מספר השלשות (A , B , C) של משבצות, המקיימות בו-זמנית את התנאים הבאים:
(i) A , B באותה שורה,
(ii) B , C באותה עמודה,
(iii) A , C לבנות, B אדומה.
מהו הערך הגדול ביותר האפשרי של Γ ?

6. לכנס בנושא "שלום בין כלבים לחתולים" מגיעים מספר כלבים וחתולים. בכל יום, מארגנים ישיבה שבה מבקשים מחתול אחד, או משני חתולים, או מכלב אחד, או משני כלבים לשאת נאום (אסור שכלב וחתול ינאמו באותו יום). לפי דעת מארגני הכנס אם מישהו ישמע נאום של מישהו אחר, הם יהיה חברים לנצח. המטרה של מארגני הכנס היא שבסופו של דבר כל כלב יהיה חבר של כל חתול. מה שמקשה על השגת המטרה, זה שאף אחד לא מסכים להגיע ליותר מאשר 6 ישיבות, לא משנה האם הוא נואם או מקשיב. האם ניתן להשיג את מטרת הכנס, אם מוזמנים אליו
א. 20 חתולים ו-20 כלבים?
ב. 20 חתולים ו-21 כלבים?
ג. 21 חתולים ו-21 כלבים, אבל החתולים מסכימים להגיע אפילו ל-7 ישיבות כל אחד (וכל כלב מוכנים להגיע ל-6 ישיבות לכל היותר, כמו קודם) ?