# <u>תרגיל 1</u>

התרגיל הזה מוקדש ל**סדרות שטורם (Sturm)**: סדרות מסוג $a_n=\{n\alpha\}$, כאשר סוגריים מסולסלות מסמנות חלק שבור.

**1.** זוג מספרים $k,n$ יקרא מוצלח, אם אפשר למחוק מספר ספרות מצד ימין של הרישום העשרוני של $2^n$ ולקבל $5^k$. למשל 2,8 זה זוג מוצלח: אפשר למחוק 6 מצד ימין של $2^8=256$ ולקבל $5^2=25$. הראו שאם $k,n$ מהווים זוג מוצלח, אז ניתן למחוק מספר ספרות מצד ימין של $5^n$ ולקבל $2^k-1$.

**פתרון.** נשים לב כי $2^k\cdot 5^k=10^k$, וגם $2^n\cdot 5^n=10^n$.

לפי הנתון $2^n>5^k$, ולכן בודאי $5^n>2^k$. נתבונן במספרים $A=\frac{2^n}{10^s}$ שיש לו אותה כמות ספרות משמאל לנקודה העשרונית כמו ל-$5^k$, ומספר $B=\frac{5^n}{10^t}$ שיש לו אותה כמות ספרות משמאל לנקודה העשרונית כמו ל-$2^k$ (כלומר המספרים $A,B$ הם מאותו סדר גודל כמו $5^k,2^k$ בהתאמה).

גם $A\cdot B$ וגם $5^k\cdot 2^k$ הם חזקות של 10, ומכיוון שיש להם אותה כמות ספרות המכפלות שוות (הרי אם שני מספרים אינם חזקות של 10, לראשון יש $a$ ספרות ולשני $b$ ספרות לפני הנקודה העשרונית אז מכפלתם גדולה ממש מ-$10^{a+b-2}$ וקטנה ממש מ-$10^{a+b}$). ובכן, $A\cdot B=10^k$.

לפי הנתון $5^k<A<5^k+1$. מכאן קל לראות כי $2^k>B$ וקצת יותר קשה (אבל לא הרבה יותר קשה) לראות כי $B>2^k-1$ וזה בעצם מה שצריך להוכיח.

נוכיח את החלק הפחות ברור: ש-$B>2^k-1$. אכן, לו היה $B\le 2^k-1$, אז היינו מקבלים כי $10^k=A\cdot B<\left(5^k+1\right)\cdot\left(2^k-1\right)=10^k+2^k-5^k-1$ וזה לא יתכן.

**2.** נתון $\alpha>0$ מספר ממשי. הוכיחו כי לכל $N$ חיובי שלם, קיימים מספרים שלמים $m,n$ כך ש-$0<n\le N$ ומתקיים $\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{nN}$.

**פתרון.** נכפיל את שני האגפים ב-$n$, ונראה שבעצם צריך שיתקיים $|n\alpha-m|<\frac{1}{N}$.

נתבונן במספרים $0,\{\alpha\},\{2\alpha\},\{3\alpha\},...,\{N\alpha\}$. המספרים האלה נמצאים בתחום $[0,1)$. מכיוון שיש $N+1$ מספרים יש שניים שהמרחק בינם אינו עולה על $\frac{1}{N}$ (אחרת, אם כל מרחק בין שניים ברצף היה $\frac{1}{N}$, אז המרחק בין הראשון לבין האחרון היה 1 לפחות, וזה לא אפשרי. לכן קיימים $0\le k<\ell\le N$ כך ש-

$$\left|\{\ell\alpha\}-\{k\alpha\}\right|<\frac{1}{N}$$

כלומר $\left|(\ell-k)\alpha-m\right|<\frac{1}{N}$ כאשר $m$ מספר שלם. נסמן כעת $\ell-k=n$ ונקבל מש"ל.

**הערה.** אפשר טיפה לשפר את החסם, אם נדביק את הקצוות של קטע $[0,1)$, כלומר במקום קטע יוצר מעגל שאורכו 1. הרי אם $k\alpha,\ell\alpha$ קרובים לשני קצוות מנוגדים, אז זה גם בסדר. בצורה כזאת נקבל שקיים שבר $\frac{m}{n}$ עבורו $\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|\le\frac{1}{n(N+1)}$, ואת זה אי אפשר לשפר (מתי מתקיים השוויון?).
גישה שונה שנותנת אותה תוצאה (שהיא בעצם לא גישה שונה) זו שבר משולב.

**3.** צפרדע נקודתית בעלת רגליים מלוכלכות מקפצת על מעגל בקפיצות קבועות. לאחר זמן מה (אחרי שלצפרדע נמאס לקפוץ) מודדים את אורכי כל הקשתות, הנמצאות בין עקבות סמוכות של הצפרדע. כמה מרחקים שונים עשויים להתקבל במדידות?

תשובה. 1, 2 או 3.

**פתרון.** קל לחשוב על מצב שבו יש רק אורך 1: למשל הצפרדע מתקדמת בקפיצות $\frac{1}{n}$ מהמעגל, ואז אחרי $n$ קפיצות המעגל מחולק לקשתות בעלי אורך זהה.
קל לחשוב גם על מצב שיש שתי קשתות באורכים שונים: למשל לאחר קפיצה ראשונה באורך $\alpha\neq\frac{1}{2}$.
נוכיח שבכל מקרה יהיו לא יותר מ-3 אורכים לקשתות (ותוך כדי הוכחה יהיה ברור כיצד יכול להיווצר מצב של 3).

אנחנו יכולים להניח, שכל נקודה על המעגל מתאימה למספר בתחום $[0,1)$ בהתאם מהמרחק מהנקודה לנקודת ההתחלה נגד כיוון השעון, והמיקום של צפרדע לאחר $q$ קפיצות זה $\{q\alpha\}$, כאשר $\alpha$ זה אורך הקפיצה.

נניח שבשלב מסוים במשחק נקודה מסומנת הכי קרובה ל-0 מימין היא R והיא נמצאת במרחק $\rho$, הנקודה הכי קרובה ל-0 מצד שמאל היא L והיא נמצאת במרחק $\lambda$. אנחנו נוכיח שבשלב זה כל קשת היא באורך $\rho$ או $\lambda$ או $\rho+\lambda$.
נניח שנקודה מסומנת הכי קרובה מימין ל-R באותו שלב של משחק היא $R_2$, ונקודה מסומנת הכי קרובה משמאל ל-L היא $L_2$.
לה"כ $\lambda\le\rho$, אחרת נהפוך. קל להראות ש-$\lambda$ זו הקשת הקצרה ביותר. אכן, אם יש קשת CD בין נקודות מסומנות, כאשר $C=\{m\alpha\}$, $D=\{n\alpha\}$ אז יש גם את הקשת בין 0 ל-$\{|m-n|\alpha\}$ שהיא לפחות $\lambda$. כמו שהוכחנו ש-$\lambda$ היא הקפיצה הכי קצרה שהייתה, באופן דומה מוכיחים, שהקפיצה הקצרה ביותר מנקודה שהיית קודם לנקודה שהופיעה

אחר-כך שקיימת כרגע לכיוון ימין היא לפחות $\rho$, והקפיצה הקצרה ביותר שמאלה היא לפחות $\lambda$. כמסקנה $RR_2 \geq \lambda$, לכן $0R_2 \geq \lambda + \rho$.
בנוסף, נשים לב כי ברגע בו L נוצר, המרחק ממנו לנקודה הכי קרובה מצד שמאל היה לפחות $\rho$ (כי קודם צריכה להיווצר אותה קפיצה מ-0 ימינה, והקפיצה הכי קצרה שיש מ-0 ימינה אפילו עכשיו היא $\rho$), לכן לפני ש-L נוצר, הקפיצה הכי קצרה שמאלה הייתה לפחות $\lambda + \rho$.

ובכן, נתבונן בקשת כלשהי CD (בין נקודות מסומנות, בלי נקודות מסומנות באמצע) כאשר C נוצרה לפני D. נבדוק שני מקרים:

א. D מימין ל-C. ברגע ש-D נוצרה, אז כבר יש קפיצה ימינה מ-0 שהיא הכי קצרה. הקפיצה מ-C ל-D היא גם ימינה, והיא לא יותר קצרה (הרי הקפיצה הכי קצרה ימינה צריכה להיות ליד 0), אבל היא גם לא פחות קצרה, כי קפצנו ימינה מנקודה מסומנת לנקודה שמימין ל-C. אם D נוצרה אחרי R, אז $CD = 0R = \rho$. אם D נוצרה לפני R, אז $CD \geq \lambda + \rho$, הרי לפני R הקפיצה הכי גדולה מ-0 ימינה הייתה לפחות $\lambda + \rho$.

ב. D משמאל ל-C. אז כמו במקרה הקודם, אם D נוצרה אחרי L אז $CD = \lambda$, ואם היא נוצרה לפני L אז הקפיצה הכי קטנה שמאלה שהייתה מ-0 היא לפחות $\lambda + \rho$, לכן $CD \geq \lambda + \rho$.

ובכן ראינו שמתקיים אחד מ-3 מקרים: או שקשת כלשהי $\lambda$ או $\rho$ או שהיא לפחות $\lambda + \rho$. נוכיח שכל קשת היא לכל היותר $\lambda + \rho$ ובזה נסיים הוכחה שיש רק 3 אורכי קטעים. קודם כל, נשים לב כי אחרי שנוצרה L, אנחנו ניצור נקודה במרחק $\lambda$ משמאל לכל נקודה שקיימת כבר, ולכן בכל קשת באורך מעל $\lambda$ תכנס נקודה בשלב מסוים. לכן החל מרגע מסוים לכל קשת שאורכו מעל $\lambda$ תכנס נקודה מסומנת.
תהיה E נקודה ראשונה שתכנס ל-CD. מכיוון ש-L כבר קיימת, אז E נמצאת במרחק $\lambda$ לכל היותר מנקודה שכבר קיימת, אז המרחק מ-E לקצה הימני של CD לכל היותר $\lambda$.
כמו כן, מכיוון ש-R כבר קיימת, המרחק מ-E לקצה השמאלי של CD לכל היותר $\rho$.
לכן $CD \leq \lambda + \rho$.
**הערה.** מהדברים שהוכחנו (או בדרך אחרת) אפשר להבין להבנה של איך התהליך של קפיצות צפרדע מתנהל. אפשר לחלק את התהליך לתקופות: בכל תקופה יש מרחקים הכי קצרים מ-0 לשני הכיוונים שסומנו $\rho, \lambda$, ובתקופה זאת יש גם קשתות $\lambda + \rho$; מה שקורה בתקופה הזאת זה שמפצלים כל קשת "ארוכה" של $\lambda + \rho$ לשתי קשתות של $\rho, \lambda$. כאשר פוצלו כל הקשתות, ונשארו רק קשתות באורכים $\lambda$ ו-$\rho$, אז ליד 0 נוצרת קשת חדשה באורך $|\lambda - \rho|$.
כלומר על המרחקים $\rho, \lambda$ מתנהל אלגוריתם אוקלידוס, שמתחיל עם שני הקטעים $\alpha, 1-\alpha$. אם $\alpha$ רציונאלי, אז בשלב כלשהו מגיעים ל-0, ומרגע זה על המעגל מתקבל מצולע משוכלל. אם לא, אז התהליך ממשיך לנצח והצפרדע מכסה מעגל באופן צפוף וכמעט אחיד.

**4.** מבין הספרות הראשונות (השמאליות ביותר) ברישום העשרוני של המספרים $1,2,2^2,2^3,...,2^{1000000}$ מה מופיע יותר פעמים: 3 או 4?

פתרון. נתבונן ב-$\log\left(2^n\right)=n\log 2$, כאשר $\log$ זה לוגריתם בסיס 10.
$\left[\log(N)\right]$ קשור לכמות הספרות ברישום (העשרוני) של $N$, וחלק שבור $\{\log(N)\}$ קשור לספרות המובילות שלו. אכן, למשל $\log 3\le\{N\}<\log 4$ מתקיים אך ורק כאשר $3\cdot 10^k\le N<4\cdot 10^k$, כלומר כאשר $N$ מתחיל ב-3.
נשים לב כי $\log 2$ הוא מספר אי-רציונלי: הרי אם היו קיימים מספרים שלמים עבורם $\log 2=\frac{m}{n}$, ניתן להניח שהם חיוביים, אז $2=10^{m/n}$, כלומר $2^n=10^m$ ואז שני האגפים מתחלקים ב-5.

ובכן, אנחנו שוב, כמו בשאלה הקודמת, מדברים על קפיצות צפרדע. האידיאולוגיה הכללית היא, שמכיוון שהצפרדע מכסה את המעגל בצפיפות אחידה, אז הוא יותר יבקר בקטע היותר ארוך מאשר בקטע היותר קצר. אורך הקטע שמתאים לספרה ראשונה 3 הוא $\log 4-\log 3=\log\frac{4}{3}$, ואורך הקטע של ספרה 4 הוא $\log 5-\log 4=\log\frac{5}{4}$. קל לראות שהראשון ארוך יותר, הרי $\log\frac{4}{3}-\log\frac{5}{4}=\log\frac{16}{15}>0$. מכאן אפשר לנחש שעבור $n$ גדול מספיק, בין $1,2,4,...,2^n$ יש יותר כאלה שמתחילים ב-3 מאשר ב-4.

כמובן, למספרים ספציפיים צריך לעבוד, על מנת להוכיח שיש יותר מספרים שמתחילים ב-3. למשל נשים לב, שאם $4\cdot 10^s\le x<5\cdot 10^s$ אז $32\cdot 10^s\le 8x<40\cdot 10^s$.
לכן אם $2^k$ מתחיל ב-4, אז $2^{k+3}$ מתחיל ב-3 (והספרה השנייה גדולה מ-1). נשים לב, כי במקרה כזה גם $2^{k+1}$ לא מתחיל ב-4 (אלה ב-8 או 9) וגם $2^{k+2}$ לא מתחיל ב-4 אלה ב-1.
ובכן, בסדרה $1,2,4,...,2^n$, לאחר כל מספר שמתחיל ב-4 אחרי 3 צעדים יש מספר שמתחיל ב-$3s$, כאשר $s\ge 2$. יתכן כמובן ש-4 מופיע כספרה ראשונה של אחד המספרים בין 3 האיברים האחרונים בסדרה, אבל בכל מקרה אם יש $N$ מספרים שמתחילים ב-4, אז יש לפחות $N-1$ מספרים שמתחילים ב-3. לכן מספיק להראות שעבור $n$ מספיק גדול, למשל $n=1000000$, יש לפחות שני מספרים בסדרה של חזקות 2 שמתחילים ב-30 או ב-31.
**טענה.** $\log(1.024)>\frac{1}{120}$.
הטענה היא טכנית ולא קשה, נוכיח אותה בסוף.

כמו שהסברנו בפתרון של השאלה הקודמת, המרחק הכי קצר בסיפור על הצפרדע הוא בסמוך ל-0, מימין או משמאל. קל לראות, שכל פעם כאשר מופיע מרחק קצר יותר, הוא מהצד האחר של 0: אם המרחק הקצר הקודם היה מימין ל-0, אז המרחק הקצר החדש משמאל ל-0. אכן, ברגע שנוצר מרחק $\alpha_i$ מצד ימין של 0, שהוא המרחק הקצר ביותר שיש כרגע, אז כל פעם שניצור נקודה נוספת היא תהיה במרחק $\alpha_i$ מימין מנקודה שכבר קיימת, לכן לפני שיוצרים נקודה יותר קרובה ל-0 מצד ימין צריכים ליצור נקודה יותר קרובה ל-0 מצד שמאל.

נסמן $\varepsilon = \log(1.024) = \{\log(2^{10})\}$. נחשוב על $n$ טבעי, עבורו $\{\log(2^n)\} > 1-\varepsilon$, כלומר $2^n \cdot 1.024$ הוא מספר יותר ארוך מאשר $2^n$ עצמו. קל לראות ש-3 ספרות ראשונות של $2^n$ זה לפחות 976, הרי $(1-0.024)\cdot(1+0.024)<1$, ומכאן רואים שב-10 מספרים ההתחלתיים בסדרה $2^n$ אין מספר כזה, לכן $\{10\cdot\log 2\}$ הוא יותר קרוב ל-0 על המעגל מאשר כל מספר קודם בסדרת הצפרדע. לכן המספר הבא שהכי קרוב ל-0 יהיה מצד ימין ל-0, כלומר בדיוק כזה ש-$\{n\cdot\log 2\} > 1-\varepsilon$.

ובכן, לפי הטענה $\varepsilon > 120$, לכן לפי שאלה 2 בין 121 מספרים ראשונים בסדרה $\{n\log(2)\}$ יופיע מרחק שקטן מ-$\frac{1}{120}$, והמרחק הזה יופיע לראשונה בין 0 למספר מסוים מימינו, כלומר קיים $n \le 120$ עבורו $\{\log(2^n)\} > 1-\varepsilon$.

אנחנו טוענים, כי עבור ה-$n$ הזה המספרים $2^{n+5} = 32\cdot 2^n$, וגם $2^{2n+5} = 32\cdot(2^n)^2$ מתחילים ב-30 או ב-31 (בלשון של צפרדע – עם צועדים מ-$\log 3.2$ שמאלה בצעדים שקטנים מ-$\varepsilon$, לא נעבור את $\log 3$.

מספיק להראות, כי $3\cdot(1.024)^2 < 3.2$, כלומר $(1+0.024)^2 < \frac{3.2}{3}$, כלומר $1+0.048+0.000576 < 1+0.0666...$ וזה ברור.

ובכן, החל מ-$n \ge 245$ בסדרה $1,2,...,2^n$ יש לפחות שני מספרים שמתחילים ב-30 או ב-31 ולכן יש יותר מספרים שמתחילים ב-3 מאשר מספרים שמתחילים ב-4.
נשאר להוכיח את הטענה.

**הוכחת טענה.** צ"ל $\log(1.024) > \frac{1}{120}$. באופן שקול $1.024 > 10^{\frac{1}{120}}$ או $1.024^{120} > 10$.

נזכיר את אי-שוויון ברנולי: $(1+x)^n \ge 1+nx$. קל להוכיח אותו באינדוקציה על $n$ לכל $n$ טבעי, או מקמירות הפונקציה לכל $n \ge 1$ ממשי.

בכל מקרה, מאי-שוויון ברנולי $1.024^{10} \ge 1.24$, לכן מספיק להראות כי $1.24^{12} \ge 10$.

$(1+0.24)^4 = 1+4\cdot 0.24+6\cdot\left(\frac{24}{100}\right)^2+... > 1+0.96+6\frac{576}{10000} > 1.96+0.34 = 2.3$

לכן מספיק להראות כי $2.3^3 > 10$. אבל

$(2+0.3)^3 = 8+3\cdot 4\cdot 0.3+3\cdot 2\cdot 0.09+0.027 = 8+3.6+... > 11$

ובכן, $1.024^{120} > 1.24^{12} > 2.3^3 > 11 > 10$.

**הערה.** אפשר, אבל יותר קשה, להוכיח כי $\log(1.024) > \frac{1}{100}$.

**5.** קבוצת נקודות במישור נקראת סבירה, אם קיים פולינום בשני משתנים $p(x,y)$ שאינו 0 זהותית, שמתאפס בכל הנקודות של הקבוצה (יכול להתאפס גם בנקודות אחרות). קבוצה שהיא לא סבירה, כלומר כזאת שכל פולינום שמתאפס בכל הנקודות שלה חייב להתאפס בכל הנקודות של המישור, תקרא קבוצה פרועה. נסמן ב-$d_n$ את כמות הספרות ברישום העשרוני של $4^n$, וב-$e_n$ את כמות הספרות של $5^n$.

א. האם קבוצת הנקודות $(d_n, e_n)$ לכל $n$ טבעי, היא סבירה או פרועה?

ב. האם קבוצת הנקודות $(d_n, n-e_n)$ לכל $n$ טבעי, היא סבירה או פרועה?

הערה: השאלה מהמיונים של נבחרת הישראלית בתשע"ב.
תשובה. א. פרועה. ב. סבירה.

**פתרון. ב.** נסמן על ידי $b_n$ את כמות הספרות במספר $2^n$. אזי $10^{b_n}>2^n>10^{b_n-1}$, וגם $10^{e_n}>5^n>10^{e_n-1}$ לכן $10^n=10^{b_n+e_n-1}$ ולכן $b_n+e_n=n+1$, ז. א. $n-e_n=b_n-1$.
מצד שני $10^{2b_n}>4^n>10^{2b_n-2}$ לכן $d_n$ שווה ל-$2b_n-1$ או $2b_n$.
לכן כל הנקודות $(d_n,n-e_n)$ מקיימות $x-2y$ הוא 1 או 2, לכן כולן אפסים של פולינום $(x-2y-1)(x-2y-2)$.

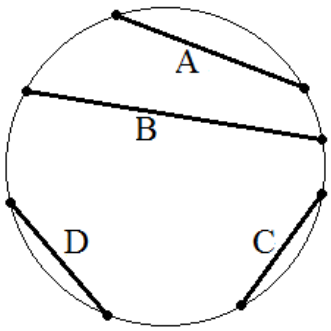
**א.** בהינתן פולינום $p(x,y)$ שאינו 0 זהותי נגיד שקו ישר $y=c$ הוא אסימפטוטה אופקית ימינהאם קיימת סדרה $(x_n,y_n)$ כך ש-$x_n\to\infty$, כאשר $y_n\to c$. קל לראות שיש מספר סופי של אסימפטוטות אופקיות: אפשר לרשום $p(x,y)=\sum_i p_i(x)y^i$, ואז אפשר עבור $x$ גדול מספיק לחלק את כל המחוברים ב-$p_j(x)$ שיש לו את הדרגה הגבוהה ביותר מבין כל $p_i$, ואז יש גבול סופי לכל המקדמים של פולינום ב-$y$ כאשר $x\to\infty$, לכן גם שורשים ב-$y$ חייבים להתכנס לאחת מבין מספר סופי של נקודות (לא יותר מאשר דרגה של פולינום ב-$y$).
אותה הגדרה ואותה מסקנה תקפה עבור אסימפטוטות נטויות בכיוון מסוים.
אורך של מספר טבעי שווה לחלק השלם של הלוגריתם עשרוני שלו פלוס 1. לכן

$$(d_n,e_n)=\left(\lfloor n\log 4\rfloor+1,\lfloor n\log 5\rfloor+1\right)$$

כמובן שהזזה ב-1 לא משפיע על סוג הקבוצה, לכן ניתן לשאול על קבוצה $(\lfloor n\alpha\rfloor,\lfloor n\beta\rfloor)$, כאשר $\alpha=\log 4$, $\beta=\log 5$.
כל הנקודות נמצאות לא מאוד רחוק מהישר $(\alpha t,\beta t)$ אבל מוזזות בווקטורים $-(\{n\alpha\},\{n\beta\})$. הווקטורים האלה מקיימים תנאים מסוימים, למשל $\{n\alpha\}+2\{n\beta\}$ הוא מספר שלם, הרי $n\alpha+2n\beta=\log\left(4^n\cdot\left(5^n\right)^2\right)=\log\left(100^n\right)=2n$, כלומר $\{n\alpha\}+2\{n\beta\}$ זה 1 או 2. מצד שני, $\beta=\log 5$ אירציונאלי, אכן, אילו $\log 5=\frac{k}{\ell}$ היינו מקבלים $5^\ell=10^k$ וזה לא יתכן. לכן הסדרה $\{n\beta\}$ מתקרבת לכל נקודה בקטע $(0,1)$ כמה שנרצה אינסוף פעמים, בפרט גם לכל נקודה בקטע $(0,\frac{1}{2})$.
ווקטור $-(\{n\alpha\},\{n\beta\})$ כאשר $\{n\beta\}<\frac{1}{2}$ מקיים $2y+x=-1$, והוא לא מקביל לישר $(\alpha t,\beta t)$ שיש לו שיפוע אי-רציונאלי (וגם חיובי), לכן אם נבחר כל פעם $s$ שונה בתחום $(0,\frac{1}{2})$ ונבחר סדרה $n_k\to\infty$ כך ש-$\{\beta n\}\to s$, נקבל אסימפטוטה שונה שמקבילה לקו ישר $(\alpha t,\beta t)$. לכן לקבוצה שלנו יש אינסוף אסימפטוטות בכיוון מסוים, אבל זה לא יתכן לקבוצות סבירות, לכן הקבוצה פרועה.

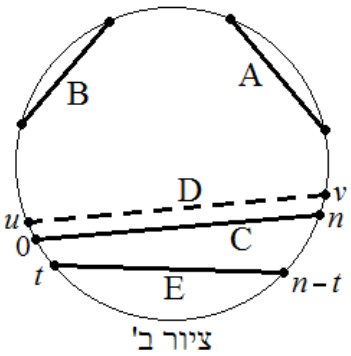
**6*.** יהא $n\geq 3$ מספר שלם, ונתבונן במעגל שעליו ממוקמות $n+1$ נקודות במרווחים שווים. נתבונן בכל הדרכים לסמן את הנקודות באמצעות המספרים $0,1,...,n$ כך שכל מספר מופיע בדיוק פעם אחת. שני סימונים נחשבים זהים, אם אחד מתקבל מהשני על ידי סיבוב של המעגל. סימון נקרא **יפהפה** אם לכל ארבעה מספרים $a<b<c<d$ המקיימים $a+d=b+c$, המיתר המחבר את הנקודות המסומנות $a$ ו-$d$ לא נחתך עם המיתר המחבר את הנקודות המסומנות $b$ ו-$c$.
נסמן ב-$M$ את מספר הסימונים היפהפיים, ונסמן ב-$N$ את מספר הזוגות הסדורים של שלמים חיוביים $(x,y)$ המקיימים $x+y\leq n$ וכן $\gcd(x,y)=1$. הוכח/י כי
$$M=N+1.$$

הערה. השאלה הזאת הייתה הכי קשה ב-IMO ב-2013.



ציור א'

**פתרון ראשון.** בהינתן סידור מעגלי של $\{0,1,2,...,n\}$ נגיד כי $k$-מיתר זו מיתר שמחבר שני מספרים שסכומם $k$. נגיד ששלוש מיתרים **מסודרים** אם אחד מהם מפריד בין שני אחרים. למשל בציור א' המיתרים A, B, C מסודרים והמיתרים B, C, D לא. מבחינתנו (ומבחינת הטענה הבאה) גם כאשר מחברים נקודה לעצמה זה מיתר.



ציור ב'

**טענה.** בכל סימון יפהפה, כל $k$ 3-מיתרים מסודרים.
**הוכחה.** באינדוקציה. עבור $n\leq 3$ הטענה ברורה. נניח שהוכחנו לכל מספר שקטן מ-$n$. אז $n$ חייב להיות אחד מקצוות של המיתרים (אחרת מוחקים את הקודקוד $n$ ואז כבר הוכחנו). באופן דומה גם 0 הוא אחד הקצוות, אחרת נמחק את הקודקוד 0 ונחסיר 1 מכל המיתרים. אזי $n\geq 0+y=k=n+x\geq n$, כלומר $k=n$. נניח כי המיתרים A, B, C לא מסודרים, כלומר המצב היחסי שלהם הוא כמו בציור ב'. אם יש נקודה $t$ שמופרדת על ידי C מהמיתרים A ו-B, אז גם $n-t$ באותו צד של C (אחרת הוא היה חותך את C), ואז אפשר להחליף את המיתר C במיתר E שמחבר $t$ ל-$n-t$. אבל אז ניתן לזרוק את $n$ ולהשתמש בהנחת האינדוקציה. לכן בצד הזה של C אין נקודות. יהיו $u,v$ מספרים צמודים ל$0,n$ בהתאמה מהצד של A ו-B, ומיתר D הוא מיתר שמחבר את $u$ ל-$v$. אם $u+v=n$ אז אפשר להחליף את C ב-D, לזרוק את $n$ ולהשתמש בהנחת האינדוקציה. אם $u+v<n$ אז ניתן למצוא נקודה $t$ עבורה $t+0=u+v$, ואם $u+v>n$ אז ניתן למצוא $t$ כך ש-$u+v=n+t$; בכל מקרה המיתר שמחבר את $t$ ל-0 או ל-$n$ חייב לא להיחתך עם D, לכן הוא חייב להיות בצד הזה של C, שבו הוכחנו שאין נקודות.

כעת, כאשר אנחנו חמושים בטענה, נפתור את השאלה באינדוקציה. מקרה $n=2$ הוא תרגיל לקוראים.
ניקח סידור יפהפה עבור $n$ שיסומן S, אם נמחק את $n$ נקבל סידור יפהפה T עבור $n-1$. לפי הטענה $n$-מיתרים של T הם מסודרים. אם 0 נמצא בין שני $n$-מיתרים שונים, נגיד שזה סידור מהסוג הראשון; אם לא, נגיד ש-T מהסוג השני. אנחנו נוכיח, שכל

סידור יפהפה מהסוג הראשון עבור $n-1$ מגיע משני סידורים עבור $n$, וכל סידור יפהפה מסוג השני מגיע משני סידורים.

קל לראות שכאשר הסידור מהסוג הראשון עבור $n-1$, אז יש לכל היותר סידור אחד מסוג $n$. אכן, יש שני $n$-מיתרים A ו-B שלכל אחד יש קצה שסמוך ל-0, והמיתר $0n$ חייב להיות מסודר עם A ו-B, לכן חייבים לשים אותו בין שני הקצוות האחרים של A ו-B. בין שני הקצוות אין נקודות נוספות, אחרת יהיו $n$-מיתרים שיחתכו או שיהיו שלשות של $n$-מיתרים שנוגדים את הטענה. לכן יש דרך יחידה למקם את $n$.
נראה שהדרך הזו תעבוד תמיד. אכן, אם נשנה את גדלי הרווחים בין הנקודות, כך שכל הקשתות יהיו באותו האורך, אז העתקה שתעביר את קודקוד $m$ ל-$n-m$ תהיה שיקוף ביחס לקוטר. קל לראות כי $k$-מיתרים כאשר $k \le n$ לא נחתכים. עם $k > n$, אז לאחר השיקוף יעביר $k$-מיתרים ל-$k_2$-מיתרים, כאשר $k_2 = 2n-k < n$, שלא נחתכים, לכן גם לפני השיקוף המיתרים לא נחתכים. ובכן, מסידור יפהפה עבור $n-1$ מהסוג הראשון תמיד אפשר לשחזר סידור יפהפה עבור $n$ וביחידות.

במקרה ש-T הוא מהסוג השני, על מנת לשחזר את S חייבים למקם את $n$ בסמוך ל-0, משמאל או מימין, וזה רק שתי אפשרויות. גם כאן עם נהפוך את כל הרווחים בין הנקודות לשווי-אורך, כל $n$-מיתרים יהיו מקבילים, לכן עדיין יש אותו סוג של שיקוף כמו קודם, ולכן שני המצבים תקינים.

ובכן, אם נסמן ב-$M_n$ את הכמות של סידורים יפהפיים עבור $n$, ונסמן ב-$L_n$ את הכמות של סידורים יפהפיים מהסוג השני עבור $n$, אז

$$M_n = \left(M_{n-1} - L_{n-1}\right) + 2L_{n-1} = M_{n-1} + L_{n-1}.$$

נשאר להראות, כי $L_{n-1}$ שווה לכמות זוגות הטבעיים $(x,y)$ שהם זרים זה לזה ומקיימים $x+y=n$. המספר האחרון שווה לכמות המספרים הטבעיים $x$ שקטנים מ-$n$ וגם זרים ל-$n$.
המספר את המקומות במעגל באמצעות מספרים מודולו $n$ לפי הסדר נגד כיוון השעון, כך ש-0 במקום האפסי. מכיוון שהסידור מהסוג השני, חייבים למקם את המספרים כן, שסכום המספר במקום $k$ והמספר במקום $-k$ יהיו 0 מודולו $n$. עם מחשוב על זה בתור פרמוטציה של שאריות מודולו $n$, כלומר פונקציה שמתאימה לכל מיקום את המספר שרשום עליו, נקבל נוסחה $f(i)+f(-i)=0 \pmod n$, לכל $i$. בנוסף, לפי טענה, כל שני $n-1$ מיתרים מקבילים. אם נסמן ב-$a = f(n-1)$ אז מתקיים גם לכל $i$

$$f(i)+f(n-1-i)=a \pmod n.$$

מכאן $f(j+1)=f(j)-a \pmod n$, כלומר $f(k)=-ak$ לכל $k$. כמובן, על מנת שנוסחה זו תיתן תמורה הכרחי ש-$a$ יהיה הפיך מודולו $n$, אבל גם מספיק: עבור $f(k)=-ak$ לכל רביעייה המקיימת $x+y=z+w$ יתקיים גם

$$f(x)+f(y)=f(z)+f(w)$$

כלומר המיתרים המתאימים יהיו מקבילים ולכן לא יחתכו.

**פתרון שני.** על המעגל $[0,1]$ עם קצוות מודבקות, נתבונן בסידור כזה: נבחר מספר $\lambda$ ממשי ונכתוב על המעגל מספר $k$ בנקודה $\{k\lambda\}$, לכל $0\le k\le n$.

כמובן, אם $\lambda=\frac{u}{v}$, כאשר $u,v$ מספרים שלמים, ו-$0<v\le n$, אז חלק מהנקודות המסומנות יתלכדו. אבל במקרים האחרים נקבל סידור של הנקודות $0,1,...,n$ על המעגל בסדר כלשהו. אם נוסיף ל-$\lambda$ מספר שלם, שום דבר לא ישתנה. לכן אפשר להניח כי $0<\lambda<1$. אם אף שני נקודות לא מתלכדות, אז לכל $0\le a,b,c,d\le n$ המקיימים $a+b=c+d$ מתקיים גם $a\lambda+b\lambda=c\lambda+d\lambda$, ולכן המיתרים $ab$ , $cd$ מקבילים. לכן לכל $\lambda$ מקבלים סידור יפהפה.

הקטע $(0,1)$ של ערכים האפשריים של $\lambda$ מפורק על ידי השברים $\frac{u}{v}$ המקיימים $0<v\le n$ למספר חלקים. לכל $v$ יש $\varphi(v)$ שברים עם מחנה $v$, כאשר $\varphi$ זו פונקצית אוילר (פרט ל-1 שאין שברים כאלה עבורו), לכן יש $\varphi(2)+\varphi(3)+...+\varphi(n)$ שברים כאלה בסה"כ, וזה בדיוק כמות שלמים חיוביים $(x,y)$ המקיימים $x+y\le n$ וכן $\gcd(x,y)=1$ כלומר $N$ לפי הגדרה, וזה מחלק את הקטע ל-$N+1$ קטעים.

אם $\lambda_1,\lambda_2$ שייכים לאותו קטע, זה נותן אותו סידור של נקודות, כי כאשר משנים ברציפות את הערך של $\lambda$ ברציפות, הסידור לא ישתנה, הרי אף נקודה לא תקפוץ מעל אף נקודה. אבל אם $\lambda_1,\lambda_2$ נמצאים בקטעים שונים, לא קשה לראות שהסדר כן ישתנה. אכן, נניח שיש שבר $\frac{u}{v}$ שמפריד אותם, וזה השבר עם המכנה הקטן ביותר שיש שמפריד בין $\lambda_1$ לבין $\lambda_2$. בפרט, זה השבר היחיד עם מכנה $v$ שפריד בין $\lambda_1$ ל-$\lambda_2$, כי בין כל שני שברים עם אותו מכנה, נגיד $\frac{u}{v}$ ו-$\frac{u+1}{v}$, קיים שבר $\frac{u}{v-1}$. אבל אנחנו מניחים, ש-$\frac{u}{v}$ הוא שבר עם מכנה הכי קטן שמפריד בין $\lambda_1$ ל-$\lambda_2$, לכן אין שבר עם מכנה $v-1$.

ובכן, כאשר נשנה את $\lambda$ ברציפות בין $\lambda_1$ לבין $\lambda_2$ ברגע מסוים $v$ יחלוף על פני $0$, אבל אף נקודה מסומנת עם מספר יותר קטן לא תחלוף על פני $0$ (הרי על מנת ש-$k$ יתלכד עם $0$, חייבים ש-$\lambda$ יהיה שבר עם מכנה $k$). מאותה סיבה $k$ לא יתחלף עם $1$. לכן המשולש $01k$ פעם אחד בלבד יהפוך את הכיוון שלו (מהמצב עם כיוון השעון למצב הפוך) ולכן המצבים שונים.

ובכן, הקטע $(0,1)$ של ערכים אפשריים עבור $\lambda$ מחולק בדיוק ל-$N+1$ קטעים, שנותנים דוגמאות לסידורים יפהפיים שונים. לדוגמאות אלה נקרא סידורי צפרדע. כרגע נשאר להראות, שכל סידור יפהפה ניתן לקבל באמצעות סדרה $\{k\lambda\}$ עבור $\lambda$ כלשהו. נוכיח את זה באינדוקציה. עבור $n\le 2$ זה די ברור.

ניקח סידור יפהפה כלשהו של $0,1,...,n$.

לפי הנחת אינדוקציה, הסידור של $0,1,...,n-1$ הוא כמו $0,\{\alpha\},\{2\alpha\},...,\{(n-1)\alpha\}$.

מצד שני, לפי הנחת אינדוקציה, הסידור של $1,2,...,n$ הוא כמו $\{\beta\},\{2\beta\},...,\{n\beta\}$.

מכיוון ש-$\alpha$ ו-$\beta$ מגדירות אותו סדר על $1,...,n-1$, לא נמצא בין $\alpha$ ל-$\beta$ אף שבר בעל מכנה שאינו עולה על $n-2$.

נניח שבין $\alpha$ ל-$\beta$ נמצא שבר שמכנה שלו $n-1$. אז כאשר נציב ב-$\lambda$ את השבר הזה, נקבל שהנקודות $0, n-1$ יתלכדו וגם שנקודות $1, n$ יתלכדו. אם נגדיל קצת, אז $n-1$ ו-

$n$ יעקפו את 0 ו-1 בהתאמה בכיוון ימינה, ואם נגדיל, אז הם יעקפו בכיוון שמאלה. בכל מקרה, המיתר שמחבר 0 עם $n$ יהיה מקביל למיתר שמחבר 1 עם $n-1$.
לכן אם $\alpha,\beta$ בצדדים שונים של השבר, המסקנה שבמצב שאנחנו מנסים ליצור, המיתר שמחבר 0 עם $n$ חותך מיתר שמחבר 1 עם $n-1$, וזה לא קורה בסידור יפהפה.
ובכן, השבר היחיד שיכול להפריד בין $\alpha$ ל-$\beta$ הוא שבר בעל מכנה $n$. אם גם שבר הזה לא קיים, אז $\alpha$ ו-$\beta$ נותנים אותו סידור צפרדע, וכל אחד מהם מתאים. אם מפריד בין $\alpha$ ל-$\beta$ רק שבר אחד שהמכנה שלו $n$, אז יש רק דבר אחד שמושפע מהבחירה באיזה צד של שבר נהיה, וזה הסדר היחסי בין 0 ל-$n$, כאשר הסדר של 0 ושל $n$ ביחס לכל בנקודות האחרות נקבע. אז נוכל לבחור את הצד המתאים, על מנת לקבל את הסידור שלנו.
ובכן, כל סידוק יפהפה של נקודות קשור לצפרדע.