תרגיל 19

1. מצאו את כל השלשות a,b,c של מספרים שלמים חיוביים עבורם 2^a+2^b+1 מתחלק ב-2^c-1.

תשובה. $(2k,2m,2)$, או $(3k+1,3m+2,3)$ או $(3k+2,3m+1,3)$ או $c=1$.

פתרון. לכל $n\geq c$ טבעי, מתקיים $2^n=2^{n-c}\pmod{2^c-1}$.
לכן אם נסמן ב-α את השארת של a בחלוקה ל-c, ונסמן ב-β את השארת של b בחלוקה ל-c, נקבל שגם $2^\alpha+2^\beta+1$ מתחלק ב-c, למרות ש-$\alpha,\beta<c$.
זה קצת מוזר, הרי $2^\alpha+2^\beta+1$ מספר חיובי, לכן $2^\alpha+2^\beta+1\leq 2^c-1$ כלומר $2^\alpha+2^\beta+2\leq 2^c$.
אם יש שוויון באי-שוויון זה, אז אם $\alpha,\beta,1$ כולם שונים, מקבלים שתי הצגות בינאריות לאותו מספר, הרי $2^\alpha+2^\beta+2=2^c$. לכן מבין המספרים $\alpha,\beta,1$ יש שניים שהם זהים, ואז כאשר מחברים שניים מבין $2^\alpha,2^\beta,2$ מקבלים חזקה יותר גבוהה של 2, ואז באגף שמאל של $2^\alpha+2^\beta+2=2^c$ אפשר לרשום סכום של שתי חזקות 2 בלבד. שוב, מכיוון שלמספר יכולה להיות רק הצגה בינארית אחת, אז באגף שמאל יישארו שתי חזקות 2 זהות. ובכן, מבין המספרים $\alpha,\beta,1$ ישנם שתי מספרים זהים ואחד שגדול ב-1 משני המספרים האחרים.
ובכן, מקבלים ש-$\alpha,\beta,1$ הם $0,0,1$ ואז $c=2$ והזהות היא $2^0+2^0+2=2^2$, או ש-$\alpha,\beta,1$ הם $2,1,1$ בסדר כלשהו ואז $c=3$ והזהות היא $2^2+2^1+2=2^3$.
אבל נזכר, ש-α,β הם רק שאריות של a,b בחלוקה ל-3.
במקרה הראשון נקבל ש-a,b מתחלקים ב-c, כלומר a,b הם מספרים זוגיים כלשהם.
במקרה השני נקבל ש-a,b נותנים שאריות 1 ו-2 בחלוקה ל-3.

נשאר המקרה, שהיחס בין $2^\alpha+2^\beta+1$ ל-2^c-1 זה לפחות 2.
אז $2^\alpha+2^\beta+1\geq 2\left(2^c-1\right)$, כלומר $2^\alpha+2^\beta+3\geq 2^{c+1}$.
אבל $\alpha,\beta\leq c-1$, לכן $2^{c-1}+2^{c-1}+3\geq 2^{c+1}$ כלומר $2^c+3\geq 2^{c+1}$. לכן $4>3\geq 2^c$.
כלומר $2>c$.
אז $c=1$ ואז שואלים בשאלה עבור איזה a,b מספר מסוים מתחלק ב-1, וזה תמיד.

2. לדוד משה הייתה חווה, ובה 21 פרות. לכל פרה בחווה, אם נשים אותה בצד, משה יכול לפלג את הפרות הנותרות לשני עדרים, כך שבכל עדר יהיו 10 פרות בדיוק, והמשקלים הכוללים של הפרות בכל אחד מהעדרים יהיו שווים. הראו שמשקל של כל הפרות זהה, אם
א. כל פרה שוקלת מספר שלם של גרמים.
ב*. כל פרה שוקלת מספר ממשי של גרמים.

פתרון. א. נניח שיש דוגמה של עדר פרות שבו התנאים מתקיימים, אבל לא כל הפרות בעלות אותו משקל (אנחנו מרשים שמשקל של כל פרה יהיה מספר שלם אי-שלילי של גרמים). מבין כל עדרים מסוג זה, ניקח עדר שמשקלו הכולל קטן ככל האפשר.
כל פעם שלוקחים פרה כלשהי הצידה, נקבל שמשקל הכולל של הפרות האחרות זוגי.
לכן זוגיות המשקל של כל פרה שווה לזוגיות של המשקל הכולל של כל הפרות.
לכן או שלכל הפרות הן בעלות משקל זוגי, או שלכולן יש משקל אי-זוגי. אם המשקל זוגי, אז ניתן לעשות דיאטה רצינית לכל הפרות שכל המשקלים ירדו פי 2. נקבל עדר מאותו סוג, אבל עם משקל כולל קטן יותר, בניגוד להנחה שבחרנו עדר מינימאלי.
לכן משקל של כל הפרות אי-זוגי. אבל אז אפשר לעשות דיאטה קלה לכל הפרות, שמשקל של כל פרה ירד בגרם אחד. שוב נקבל עדר שמקיים את כל התנאים, לכן העדר לא היה מינימאלי.
לכן אין עדר כזה.

ב. נניח שיש עדר כזה עם משקלים ממשיים. ניתן משקל לכל פרה: $x_1, x_2, ..., x_{21}$. כל פעם שלוקחים פרה הצידה, ניתן להגדיר חלוקה לעשיריות שוות משקל. זה נותן משוואה ליניארית על משקלי הפרות. כך נקבל מערכת של 21 משוואות ליניאריות. כידוע מאלגברה ליניארית, פתרונות שלה מגדירות מישור כלשהו ב-$\mathbb{R}^{21}$, שנפרס על ידי ווקטורים רציונאליים (הרי ניתן לפתור את מערכת משוואות בשיטה של גאוס, והמשוואות רציונאליות). לכל ליד כל נקודה במרחב הפתרונות יש נקודה רציונאלית.
לכן ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות שמשקלי הפרות הם מספרים רציונאליים. ניתן גם להכפיל במחנה משותף ולהניח שמשקלי הפרות הם מספרים שלמים.
לכן לפי מה שהוכחנו בסעיף א', לכל הפרות אותו משקל.

3. הוכיחו שקיים מספר n שגדול מ-1000, עבורו סכום הספרות של 2^n גדול יותר מסכום הספרות של 2^{n+1}.

פתרון. נניח שלא: עבור N מסוים, לכל $n > N$, סכום הספרות של 2^{n+1} גדול מסכום הספרות של 2^n.
כאשר מסתכלים על חזקות 2 מודולו 9 , או על סכום הספרות שלהם מודולו 9, שזה אותו דבר, מקבלים סדרה כזאת: 1, 2, 4, 8, 7, 5, ואז שוב אותם מספרים באופן מחזורי. מכאן אפשר לראות שאם סכום הספרות עולה כל פעם, אז הוא מקבל תוספות לפחות של $+1$, ואז $+2$, ואז $+4$, ואז $+8$, ואז $+7$, ואז $+5$ בכל מחזור כזה של 6.
כלומר אם סכום ספרות של 2^n עולה כל הזמן מרגע מסוים, אז עבור n גדול מספיק סכום הספרות של 2^{n+6} הוא לפחות כמו סכום הספרות של 2^n ועוד
$$1+2+4+8+7+5=27.$$
לכן סכום הספרות של 2^{N+6K} זה לפחות $27 \cdot K$ ועוד סכום הספרות של 2^N.

מצד שני, כאשר עוברים מ-2^n ל-2^{n+6} אז מכפילים ב-$2^6 = 64$, וזה לא יותר מאשר להכפיל ב-100, כלומר אורך המספר לא עולה ביותר מאשר 2 ספרות. לכן עם כמות הספרות של 2^N הוא L, אז כמות הספרות של 2^{N+6K} אינו עולה על $L+2K$.
לכן סכום הספרות של 2^{N+6K} אינו עולה על $9(L+2K)$.

לכן לכל K חיובי שלם, מקבלים $27K \le 9(L+2K)$. כלומר $3K \le L+2K$, כלומר $K \le L$, כאשר L מספר קבוע. זה לא יתכן.

4. מצאו את כל המספרים הטבעיים האי-זוגיים n, עבורם מתקיים: לכל a ו-b שהם שני מחלקים זרים של n, גם $a+b-1$ הוא מחלק של n.

תשובה. n הוא חזקה של ראשוני.

פתרון. נניח ש-p הוא המחלק הראשוני הקטן ביותר של n. נרשום: $n = p^m \cdot k$, כאשר k לא מתחלק ב-p.

נציב $p,1$ במקום a,b בתנאי הנתון. אז נקבל שגם $\ell = p+k-1$ הוא מחלק של n. אילו ל-ℓ היה מחלק ראשוני q שהוא גם מחלק של k, אז גם $p-1$ היה מתחלק בו. אבל כל המחלקים הראשוניים של k גדולים מ-p. לכן $(k,\ell)=1$.

לכן ℓ הוא חזקה של p, כלומר $p^\alpha = p+k-1$.

אם $k>1$ אז $\ell = p+k-1 > p$, ואז ℓ מתחלק ב-p^2.

נמיב אז את p^2,k בתנאי של שאלה. נקבל שגם p^2+k-1 הוא מחלק של n. אבל שוב, p^2+k-1 זר ל-k, הרי אחרת מחלק ראשוני של k הוא מחלק גם של

$$p^2-1 = 2 \cdot \tfrac{1}{2}(p+1)\cdot(p-1)$$

ואז היה ל-k מחלק ראשוני שקטן מ-p בניגוד להנחה.

לכן $p^\beta = p^2+k-1$, כאשר ברור ש-$\beta > \alpha > 1$.

לכן $p^\beta - p^\alpha = p^2 - p$ מתחלק ב-p^2 וזה לא הגיוני. נשאר לבדוק מקרה של $k=1$, כלומר, $n = p^m$. אז כל פעם שלוקחים שני מחלקים זרים ל-n, נקבל שאחד מהם הוא 1 והשני הוא p^r, ואז סכום מחלקים פחות 1 הוא p^r וגם הוא מחלק, כלומר ההנחה מתקיימת.

5. המספרים a,b,c,d הם שלמים אי-זוגיים המקיימים $0<a<b<c<d$. בנוסף נתון ש-$ad=bc$, וגם $a+d=2^m$, ו-$b+c=2^k$, באשר k,m מספרים שלמים. מצאו את a.

תשובה. $a=1$.

פתרון. מהתנאים רואים כי

$$2^{2m}-2^{2k} = (d+a)^2-(b+c)^2 = d^2+a^2-b^2-c^2 = (d-a)^2-(b-c)^2 =$$
$$= (d-a-b+c)(d+b-a-c)$$

קל לראות ששני הגורמים באגף ימין חיוביים, הרי $d-a > c-b > 0$. לכן $m>k$.

ברור ש-$k \geq 2$ (הרי 2^k הוא $b+c$, סכום של שני מספרים אי-זוגיים חיוביים שונים) ולכן $a+d$, $b+c$ מתחלקים ב-4, לכן $d-a=2 \pmod 4$, $c-b=2 \pmod 4$.
לכן מבין $U=d+b-a-c$, $V=d-a-b+c$ לכל היותר אחד מתחלק ב-8 (לו שניהם היות מתחלקים ב-8, אז $\frac{1}{2}(U+V)=a-d$ וגם $\frac{1}{2}(V-U)=c-b$ היו מתחלקים ב-4).
אבל UV מתחלקת ב-2^{2k}. לכן U או V מתחלק ב-2^{2k-2}.
אבל שניהם $U,V < 2d < 2^{m+1}$, לכן $m \geq 2k-2$.
כלומר $4(a+d)=2^{m+2} \geq 2^{2k} = (b+c)^2 = (b-c)^2 + 4bc > 4ad$.
לכן $a+d \geq ad+1$ במילים אחרות $(a-1)(d-1) \geq 0$ לכן $a \leq 1$ כלומר $a=1$.

6*. לכל פולינום $P(x)=a_0+a_1x+...+a_kx^k$ עם מקדמים שלמים, נסמן ב-$o(P)$ את מספר המקדמים האי-זוגיים שלו. לכל $i \geq 0$ שלם נסמן $Q_i(x)=(1+x)^i$. הוכיחו שלכל $0 \leq i_1 < i_2 < i_3 < ... < i_n$ מתקיים $o(Q_{i_1}+Q_{i_2}+Q_{i_3}+...+Q_{i_n}) \geq o(Q_{i_1})$.

פתרון. בשאלה זאת בעצם מדובר על פולינומים, שהמקדמים שלהם מחושבים מודולו 2.
קל לראות כי $(1+x)^2 = 1+x^2 \pmod 2$, ולכן גם

$$(1+x)^{2^j} = \left(...\left((1+x)^2\right)^2...\right)^2 = \left(...\left(1+x^2\right)^2...\right)^2 = \left(...\left(1+x^4\right)^2...\right)^2 = 1+x^{2^j}$$

ולכן אם $i=2^j$, אז $o(Q_i)=2$.

אנחנו נוכיח באינדוקציה על הדרגה של פולינום Q. בדיקה של בסיס אינדוקציה לא קשה.
נגדיר m להיות חזקה של 2, עבורה $m \leq i_0 < 2m$.
קיימות שתי אפשרויות: $i_n < 2m$ או $2m \leq i_n$.

באפשרות הראשונה אפשר לרשום בעצם $m \leq i_0 < i_1 < ... < i_n < 2m$.
ניתן לרשום $i_k = m + j_k$, כאשר $j_k < m$ לכל k.
לכן $Q = Q_{i_0} + Q_{i_1} + ... + Q_{i_n} = (1+x)^m \left(Q_{j_0} + Q_{j_1} + ... + Q_{j_n}\right) = \left(1+x^m\right) \cdot Q$.
אבל Q הוא פולינום שדרגתו קטנה מהדרגה של Q, המקדמים של Q הם בדרגות שקטנות מ-m, ולכן לכל מונום x^i של Q יהיו שני מקדמים לא אפסיים של Q: נקבל x^i ועוד x^{i+m}. המונומים לא יתקזזו, הרי המונומים מסוג ראשון בדרגה קטנה מ-m, ומהסוג השני הם בדרגה לפחות m. לכן $o(Q) = 2 \cdot o(Q)$, ומסיבה דומה גם $o(Q_{i_o}) = 2 \cdot o(Q_{j_0})$.
אבל לפי הנחת אינדוקציה $o(Q) \geq o(Q_{j_0})$, לכן $o(Q) \geq o(Q_{i_0})$

באפשרות השנייה ניתן לרשום $m \le i_0 < i_1 < ... < i_r < 2m \le i_{r+1} < ... < i_n$. אז

$$Q = Q_{i_0} + ... + Q_{i_r} + (1+x)^{2m}\left(Q_{i_{r+1}-2m} + ... + Q_{i_n}\right) = A + \left(1+x^{2m}\right)\cdot B$$

כאשר $A = Q_{i_0} + ... + Q_{i_r}$ הוא פולינום שהמעלה קטנה שלו מ-$2m$,

ו- $B = Q_{i_{r+1}-2m} + ... + Q_{i_n-2m}$ פולינום נוסף. אז $Q = A + B + x^{2m}B$.

נשים לב, כי o מקיים "אי-שוויון המשולש": $o(P_1)+o(P_2) \ge o(P_1+P_2)$ לכל שני פולינומים. בצורה אחרת, $o(P)-o(P_1) \le o(P-P_1)$ לכל שני פולינומים (בשביל לראות את זה מספיק להניח $P_2 = P - P_1$.

נשים לב, כי $o\left(A+x^{2m}B\right) = o(A)+o(B)$, הרי כל המונומים של A הם מדרגה שקטנה מ-$2m$. לכן

$$o(Q) = o\left(\left(A+x^{2m}B\right)+B\right) \ge o\left(A+x^{2m}B\right) - o(B) = o(A) + \cancel{o(B)} - \cancel{o(B)}.$$

אבל לפי הנחת אינדוקציה, $o(A) \ge o\left(Q_{i_0}\right)$. לכן $o(Q) \ge o(A) \ge o\left(Q_{i_0}\right)$.