תרגיל 19

1. מצאו את כל השלשות a,b,c של מספרים שלמים חיוביים עבורם 2^a+2^b+1 מתחלק ב-2^c-1.

2. לדוד משה הייתה חווה, ובה 21 פרות. לכל פרה בחווה, אם נשים אותה בצד, משה יכול לפלג את הפרות הנותרות לשני עדרים, כך שבכל עדר יהיו 10 פרות בדיוק, והמשקלים הכוללים של הפרות בכל אחד מהעדרים יהיו שווים. הראו שמשקל של כל הפרות זהה, אם
א. כל פרה שוקלת מספר שלם של גרמים.
ב*. כל פרה שוקלת מספר ממשי של גרמים.

3. הוכיחו שקיים מספר n שגדול מ-1000, עבורו סכום הספרות של 2^n גדול יותר מסכום הספרות של 2^{n+1}.

4. מצאו את כל המספרים הטבעיים האי-זוגיים n, עבורם מתקיים: לכל a ו-b שהם שני מחלקים זרים של n, גם $a+b-1$ הוא מחלק של n.

5. המספרים a,b,c,d הם שלמים אי-זוגיים המקיימים $0<a<b<c<d$. בנוסף נתון ש-$ad=bc$, וגם $a+d=2^m$, ו-$b+c=2^k$, באשר k,m מספרים שלמים.
מצאו את a.

6*. לכל פולינום $P(x)=a_0+a_1x+...+a_kx^k$ עם מקדמים שלמים, נסמן ב-$o(P)$ את מספר המקדמים האי-זוגיים שלו. לכל $i\geq 0$ שלם נסמן $Q_i(x)=(1+x)^i$. הוכיחו שלכל $0\leq i_1<i_2<i_3<...<i_n$ מתקיים $o(Q_{i_1}+Q_{i_2}+Q_{i_3}+...+Q_{i_n})\geq o(Q_{i_1})$.