תרגיל 18

1. על הצלעות של ריבוע ABCD נבנו משולשים משוכללים ABE, BCF, כאשר E נמצאת בתוך הריבוע, ו-F מחוץ הריבוע ABCD. הראו שהנקודות D, E, F נמצאות על ישר אחד.

פתרון. משולש DCF הוא שווה שוקיים, וזווית הראש שלו C היא $150^\circ = 90^\circ + 60^\circ$. לכן $\sphericalangle FDC = 15^\circ$.
גם משולש DAE הוא שווה שוקיים, זווית הראש שלו A היא $30^\circ = 90^\circ - 60^\circ$, כלומר $\sphericalangle EDA = 75^\circ$.
לכן $\sphericalangle FDC = 15^\circ = \sphericalangle EDC$. לכן D, E, F על ישר אחד.

2. במשולש ABC חוצי הזוויות נפגשות בנקודה I. נקודות P ו-Q נמצאות על הצלעות AB ו-AC, כך ש-PIQA מעוין. הראו שנקודת מפגש של PQ ו-BI נמצאת על המעגל החוסם של ABC.

פתרון. הישר BI, חוצה זווית של משולש ABC, פוגש שוב את המעגל החוסם של המשולש ABC בנקודה L. כמו כן, הישר CI פוגש שוב את המעגל החוסם של המשולש ABC בנקודה M.

משפט התלתן. $AL = CL = IL$, וכן $AM = BM = IM$.

אנו נוכיח את משפט התלתן בסוף. ממשפט התלתן נובע, כי ILAM דלתון, סימטרי ביחס לאלכסון LM. כלומר A סימטרי ל-I ביחס ל-LM.
בנוסף, הישר LM יוצר זוויות שוות אם הצלעות AB, AC. בשביל זה נשתמש בטענה ידוע על חשבון זוויות (שאת ההוכחה נשאיר לקוראים כתרגיל):
הזוויות בין מיתרים XY ו-UV שנפגשים במעגל היא $\frac{1}{2}\left(XU + YV\right)$.

מכאן נובע כי הזווית בין LM ל-AB היא $\frac{1}{2}\left(AL + BM\right)$, והזווית בין LM ל-AC היא $\frac{1}{2}\left(CL + AM\right)$ וזה אותו דבר, הרי $AL = CL$ וכן $BM = CM$ לפי החלק הקל של משפט התלתן.
ובכן, אם נסמן ב-P', Q' את נקודות המפגש של LM עם AB, AC בהתאמה, אז המשולש P'AQ' הוא שווה שוקיים (כאשר P'Q' הוא הבסיס), וגם A סימטרי ל-I ביחס ל- P'Q'.
לכן P'IQ'A הוא באמת מעוין, כמו PIQA. אבל זה מגדיר את הנקודות P, Q ביחידות, הרי יש רק ישר אחד דרך I שמקביל ל-AC והוא חותך את AB בנקודה P יחידה, ודבר דומה עבור Q. לכן P' מתלכד עם P, וכן Q' מתלכד עם Q.
לכן PQ עובר דרך M שגם CI עובר בו. נותר להוכיח את משפט התלתן.

הוכחת משפת התלתן. נסמן את זוויות המשולש ABC: $\sphericalangle C = \gamma$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle A = \alpha$.
אנו נוכיח את $AL = CL = IL$, החלק השני מוכח באותה צורה. הישר BIL הוא חוצה

זווית במשולש ABC. לכן הזוויות $\sphericalangle LBA = \frac{\beta}{2} = \sphericalangle LBC$. לכן על הקשתות AL, CL נשענות זוויות שוות, ולכן הקשתות שוות, וגם המיתרים שווים: $AL = CL$.
נשאר להראות כי $AL = IL$, כלומר שהמשולש ALI שווה שוקיים. באון שקול מספיק להוכיח כי $\sphericalangle LIA = \sphericalangle LAI$.
אבל $\sphericalangle LAI = \sphericalangle LAC + \sphericalangle CAI = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}$, הרי $\sphericalangle LAC$ וגם $\sphericalangle LBC = \frac{\beta}{2}$ נשענות על אותה הקשת CL.
מצד שני, $\sphericalangle LIA$ היא זווית חיצונית במשולש BIC, ולכן
$$\sphericalangle LIA = \sphericalangle IBA + \sphericalangle IAB = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle LAI .$$
מש"ל.

3. במשולש ABC, $\sphericalangle B = 60^\circ$, מעבירים חוצי זוויות AK ו-CM (כאשר K ו-M על צלעות המשולש). הוכיחו שהנקודה הסימטרית ל-B ביחס ל-KM נמצאת על AC.

פתרון. כרגיל, נסמן ב-I את נקודת מפגש חוצי-זוויות של המשולש ABC, ונסמן גם את הזוויות של ABC: $\sphericalangle C = \gamma$, $\sphericalangle B = 60^\circ = \beta$, $\sphericalangle A = \alpha$.
נוכיח, שהמרובע MIKB חסום. אכן
$$\sphericalangle MIK = \sphericalangle AIC = 180^\circ - \sphericalangle ICA - \sphericalangle IAC = 180^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\gamma =$$
$$= 90^\circ + \tfrac{1}{2}\left(180^\circ - \alpha - \gamma\right) = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\beta = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$
לכן סכום הזוויות הנגדיות $\sphericalangle I + \sphericalangle B$ במרובע MIKB היא $60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ כלומר המרובע חסום.
מרכז המעגל MIKB יסומן J. במעגל זה חוצה זווית BI חוצה גם את הקשת KM, ולכן הזוויות המרכזיות $\sphericalangle IJK = \sphericalangle IJM = \sphericalangle B = 60^\circ$, לכן JMIK הוא מעוין שזוויותיו הם 60° ו- 120°. לכן I סימטרי ל-J ביחס ל-MK.

נקודת מפגש נוספת של המעגל החוסם של CIK עם AC תסומן N. אנו נוכיח כי N בעצם סימטרי ל-B ביחס ל-MK. זה בפרט יסיים את הפתרון, הרי ביקשו להוכיח ששיקוף של B ביחס ל-KM.
במעגל CKIN הזוויות $\frac{1}{2}\gamma$ נשענות על IN, IK. לכן הקשתות שוות, ולכן $IK = IN$.
ביחד עם מה שראינו קודם, $BJ = JK = IK = IN$. אבל שיקוף ביחס ל-KM מחליף בין I ל-J. לכן אם נוכיח כי $\sphericalangle BJK = \sphericalangle NIK$, נקבל חפיפה של משולשים KJB ו-KIN, ואז הם סימטריים ביחס ל-KM, בפרט B סימטרי ל-N (שנמצא על AC) ביחס ל-AM.
לכן בשביל לסיים את הפתרון מספיק לוודא כי $\sphericalangle BJK = \sphericalangle NIK$.

לפי הגדרת N, מקבלים $\sphericalangle NIK = 180^\circ - \sphericalangle KCN = 180^\circ - \gamma$.
מצד שני, $\sphericalangle BJK$ היא זווית מרכזית במעגל MIKB, שנשענת על BK, ולכן היא מחצית של זווית היקפית: $\sphericalangle BJK = 2\sphericalangle BIK = 2\left(\sphericalangle IAB + \sphericalangle IBA\right) = 2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \alpha + \beta$.
לכן $\sphericalangle BJK = 180^\circ - \gamma = \alpha + \beta = \sphericalangle NIK$.

הערה. היה ברור שנקודה N שסימטרית ל-B היא אחת מבין שתי הנקודות, שנמצאות על AC, ומקיימות $IN=JB$. לשתי הנקודות הללו יש תיאור גיאומטרי פשוט. אחת מהן נמצאת על מעגל KIC וכן על מעגל MIA.
הנקודה השנייה 'N סימטרית ל-K ביחס ל-IC וגם סימטרית ל-M ביחס ל-IA. לו הפתרון לא היה עובד עבור N, היינו מנסים אותו חשבון זוויות עם 'N. הקוראים מוזמנים לעשות את חשבון הזוויות גם עבור 'N. כפרס יקבלו מסקנה מעניינת: המשולש 'KMN משוכלל.

4. במשולש ABC על הצלעות AB ו-BC נלקחו נקודות K ו-L בהתאמה, כך שמתקיים $AK=KL=LC$. דרך נקודת מפגש של AL ו-CK מעבירים ישר, שמקביל לחוצה הזוויות של B, שפוגש את הישר AB בנקודה M. הוכיחו כי $AM=BC$.

פתרון ראשון. נתחיל מטענה על חוצה זווית.
טענה. במשולש ABC, ניקח חוצה זווית BB_1. נקודת מפגש חוצה זווית I מקיימת: $\sphericalangle AIC=90^\circ+\beta$, כאשר $\beta=\sphericalangle ABC$. קל לראות גם שזה מאפיין את I מבין כל הנקודות על BB_1.
אנו נשאיר את הוכחת הטענה כתרגיל לקוראים.

נסמן $\varphi=\sphericalangle KAL=\sphericalangle KLA$, $\psi=\sphericalangle LKC=\sphericalangle LCK$. מכאן כל לחשב כי

$$\sphericalangle KBL=180^\circ-\sphericalangle BKL-\sphericalangle BLK=180^\circ-2\varphi-2\psi$$

נסמן את נקודת המפגש של AL ו-CK ב-Q. דרך M נעביר ישר שמקביל ל-BC, שיחתוך את KC בנקודה M. אנו טוענים שבמשולש AMN, הנקודה Q היא מפגש חוצי זוויות.
קל לראות כי Q על חוצה הזווית של M, הרי לפי בנייה BQ מקביל לחוצה זווית של $\sphericalangle ABC$, BC מקביל ל-MN. מצד שני

$$\sphericalangle AQN=\sphericalangle KQL=180^\circ-\varphi-\psi=90^\circ+\tfrac{1}{2}\sphericalangle AMN.$$

לפי הטענה, זה מספיק בשביל להגיד ש-Q הוא מפגש חוצי זוויות של AMN. לכן $\sphericalangle QAN=\sphericalangle QAK=\sphericalangle QAL=\varphi=\sphericalangle ALK$. זאת אומרת ש-KL מקביל ל-AN.
מכאן נובע, שמשולשים BKL, MAN דומים, הרי הצלעות המתאימות מקבילות.
עוד יותר קל לראות שהמשולשים MKN, BKC דומים. נסמן את אורכי הקטעים
$a=BC$, $b=AC$, $c=AB$, $x=AK=KL=LC$, $y=AM$, $z=MN$.

אז לפי דמיון של MKN, BKC נקבל $\frac{c-x}{a}=\frac{y-x}{z}$, כלומר.

לפי דמיון של MAN, BKL נקבל $\frac{c-x}{a-x}=\frac{y}{z}$, כלומר $(c-x)z=y(a-x)$.

לכן $y(a-x)=a(y-x)$ כלומר $ay-xy=ay-ax$ כלומר $y=a$ מש"ל.

פתרון שני. בפתרון זה לא נשתמש רק בתנאי $AL=LC$; לא נשתמש בנתון לגבי האורך של KL. כמו קודם, Q יסמן את נקודת המפגש של KC ו-AL.
אנחנו נבחר מערכת צירים בה $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{LC}$ אנכי. אנחנו כל הזמן נשתמש באינדקסים x ו-y על מנת לסמן קואורדינאטות של וקטור או של נקודה.

לווקטורים $\overrightarrow{LC}$, $\overrightarrow{AK}$ אותו אורך. לפי איך שבחרנו את הצירים $\overrightarrow{AK}_x = -\overrightarrow{LC}_x$ ולכן $\overrightarrow{AK}_y = \overrightarrow{LC}_y$. לכן לקווים AKBM, BLN יש שיפועים הפוכים (הם יוצרים אותה זווית אם האופק, אבל קו אחד משופע ימינה והאחר שמאלה).
אז קל לראות שחוצה זווית של $\sphericalangle ABC$ אופקי, ולכן גם MQ אופקי, כלומר $M_y = Q_y$.
ביקשו להוכיח כי $AM = BC$, אבל מספיק לבקש ש-$M_y - A_y = C_y - B_y$, הרי השיפועים זהים, ולפי הפרש בגובה ניתן לחשב אורך (עם חלוקה באותו קוסינוס).
באופן שקול צריך להוכיח $Q_y + B_y = C_y + A_y$. אם נחלק ב-2 נקבל עוד ניסוח שקול: אמצע BQ ואמצע AC נמצאים על אותו קו אופקי במערכת הצירים שלנו.
לפי **הישר של גאוס**, אמצע KL, אמצע AC, ואמצע BQ נמצאים על ישר אחד. מספיק לוודא שהישר הזה אופקי. כלומר מספיק לבדוק ש-$\frac{1}{2}\left(A_y + C_y\right) = \frac{1}{2}\left(K_y + L_y\right)$.
נכפיל ב-2, נעביר עגפים ונקבל ניסוח שקול: $C_y - L_y = K_y - A_y$. את זה כבר הוכחנו, הרי אמרנו ש-$\overrightarrow{AK}_y = \overrightarrow{LC}_y$.

5. שני מעגלים α ו-β נחתכים בנקודות M ו-N. הישר AB משיק ל-α ול-β בנקודות A ו-B בהתאמה, כאשר M יותר קרובה ל-AB מאשר N. הישר CD עובר דרך M ומקביל ל-AB, כאשר C נמצאת על α ו-D על β. הישרים AC ו-BD נפגשים ב-E, הישרים AN ו-CD נפגשים ב-P, הישרים BN ו-CD נגשים ב-Q.
א. הראו כי $EP = EQ$.
ב. הראו כי $\sphericalangle CNE = \sphericalangle DNE$.
הערה. סעיף א' היה באולימפיאדה בינלאומית ב-2000.

פתרון. א. משולשים MBD, MAC שווי שוקיים (כלומר $MB = BD$, $MA = AC$), הרי בשני המשולשים המשיק בקודקוד הראש מקביל לבסיס.
נסמן ב-W את הנקודה הסימטרית ל-M ביחס ל-AB. אז $\sphericalangle WMD = 90^\circ$, והנקודה B נמצאת על האנכים האמצעים לצלעות WM, MD של משולש WMD, לכן B היא אמצע WD. באופן דומה גם A היא אמצע של WC. מכאן רואים, ש-E היא בעצם W, ומכאן רואים ש-EM מאונך לישר CPMQD.
נסמן ב-K את נקודת המפגש של AB עם MN. אבל MN הוא הציר הרדיקלי של מעגלים α ו-β, מכאן $KA = KB$. לכן NK הוא תיכון במשולש NAB, לכן MN הוא תיכון במשולש NPQ (הרי המשולשים הומותטיים). לכן $MP = MQ$.
אבל EM מאונך לישר PQ וגם חוצה אותו; לכן משולש PEQ הוא שווה שוקיים, $EP = EQ$, מש"ל.

ב. קל לראות כי $\sphericalangle NBD + \sphericalangle NAC = \sphericalangle NMD + \sphericalangle NMC = 180^\circ$.
מכאן גם $\sphericalangle EAN + \sphericalangle EBN = 180^\circ$, ולכן המרובע חסום. לכן
$\sphericalangle ENB = \sphericalangle EAB = \sphericalangle ECD = \sphericalangle ACM = \sphericalangle AMC = \sphericalangle ANC$,
ובאופן דומה גם $\sphericalangle BND = \sphericalangle ENA$.
לכן $\sphericalangle END = \sphericalangle ENB + \sphericalangle BND = \sphericalangle ENA + \sphericalangle ANC = \sphericalangle ENC$. מש"ל.

6. במשולש חד-זוויות ABC, יהי O מרכז העיגול החוסם ו-H נקודת מפגש הגבהים. הראו שקיימות נקודות D, E, F על הצלעות BC, AC, AB בהתאמה, כך שהישרים AD, BE, CF נפגשים בנקודה אחת, ובנוסף $OD+DH=OE+EH=OF+FH$.

פתרון ראשון. נסמן ב-H_1,H_2,H_3 שיקופים של H ביחס לישרים AB, AC, BC בהתאמה. הם נמצאים על המעגל החוסם, כמו שקל להבין מחשבון זוויות.
לכן $OH_1=OH_2=OH_3=R$, כאשר R הוא רדיוס המעגל החוסם.
נסמן ב-F, E, D את נקודות המפגש של H_1,H_2,H_3 עם AB, AC, BC בהתאמה.
אזי $OD+DH=OD+DH_1=R$, ודבר דומה ניתן להגיד על E ו-F.
לכן גם $OE+EH=R=OF+FH$, וזה מוכיח את הדרישה השנייה. נשאר לוודא כי AD, BE, CF נפגשים בנקודה אחת.
נסמן ב-D' את נקודת המפגש של AO עם BC. המשולש OAH_1 הוא שווה שוקיים, כי שתי צלעותיו שוות ל-R. האנך מ-O ל-BC מקביל לגובה AHH_1, ולכן הוא יוצר זוויות שוות עם הישרים AOD' ו-ODH_1. לכן האנך מ-O ל-BC הוא חוצה זווית במשולש ODD', לכן ODD' שווה-שוקיים. לכן ביחס לאנך מ-O ל-BC, D סימטרי ל-D', אבל גם B סימטרי ל-C.
באופן דומה ניתן להגדיר E', F' בתור נקודות חיתוך של OB, OC עם AC, AB ולהוכיח שהמשולשים OEE', OFF' שווי שוקיים. תנאי צ'בה מתקיים עבור D', E', F' במשולש הרי הישרים AD', BC', EF' נפגשים בנקודה O.
לכן $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{D'C}{BD'}\cdot\frac{E'A}{CE'}\cdot\frac{F'B}{AF'}=1$, כלומר תנאי צ'בה מתקיים גם עבור הנקודות D, E, F, לכן AD, BE, CF נפגשים בנקודה אחת.

פתרון שני. אנחנו נשתמש באותם סימונים שהוגדרו בפתרון הראשון. נשים לב כי אליפסה, שמוקדיה O ו-H שהיא מקום גיאומטרי של נקודות X עבורן $OX+HX=R$ לא רק עוברת בנקודות D, E, F אלה משיקה בנקודות הללו לצלעות המשולש. מכאן נובע, שהישרים AD, BE, CF נפגשים בנקודה אחת לפי משפר בריאנשון עבור המשושה המנוון $AFBDCE$.