תרגיל 17

1. במחומש קמור נבחרה נקודה M. קודקוד של המחומש יקרא מוצלח, אם הישר שעובר דרך הקודקוד ודרך M חותך את הצלע הנגדית לקודקוד בנקודה פנימית (למשל לקודקוד A במחומש ABCDE הצלע הנגדית היא CD). הראו כי במחומש יש מספר אי-זוגי של קודקודים מוצלחים.

פתרון. הישרים של אלכסוני המחומש מחלקים את המישור למספר חלקים. כאשר מזיזם את M בתוך חלק כלשהו, על קודקוד שהיה מוצלח נשאר מוצלח, וכל קודקוד שהיה לא מוצלח נשאר לא מוצלח.
כאשר מזיזים את M כך שהוא עובר לצד האחר של אחד האלכסונים, שני הקודקודים שמגדירים את הקודקוד הזה משנים את מצבם: קל אחד מהם עובר ממצב מוצלח למצב לא מוצלח או להפך. בכל מקרה, הזוגיות של כמות הקודקודים המוצלחים נשמרת.
ניתן להגיע מכל נקודה לכל נקודה אחרת ברציפות, בלי לעבור באף נקודת חיתוך של שני אלכסונים. כל פעם שחוצים אלכסון כלשהו, הזוגיות נשמרת. לכן יש אותה זוגיות בכל נקודה במישור.
האלכסונים של מחומש קמור נפגשים ב-5 נקודות פנימיות של מחומש. נקודות אלה מהוות קודקודים של מחומש יותר קטן. אם ניקח נקודה כלשהי בתוך המחומש הקטן, נראה כי עבורה כל קודקוד הוא מוצלח ובפרט כמות הקודקודים המוצלחים היא אי זוגית. לכן לכל נקודה במישור יש כמות אי זוגית של קודקודים מוצלחים.

הערה. ניתן גם לפתור את השאלה מגרסה של משפט צ'בה עבור מחומש. משפט צ'בה עבור מחומש מנוסח כך: בוחרים לכל קודקוד נקודה פנימית בצלע נגדית. אם הקווים שמחברים כל קודקוד לנקודה מתאימה נפגשים בנקודה אחת, אז מכפלת יחסי הקטעים המכוונים שנוצרים על ידי הנקודות שנבחרו על הצלעות הוא 1.
בניגוד למשפט צ'בה למשולש, במקרה של מחומש המשפט הוא חד-כיווני: אם מכפלת היחסים שווה 1, זה עוד לא אומר שהקווים נפגשים בנקודה אחת.

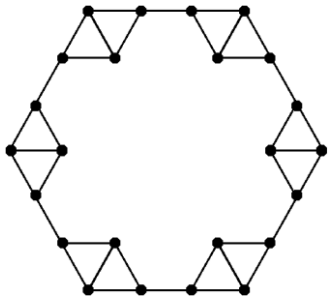
2. במישור סומנו 6 נקודות כחולות, 6 נקודות ירוקות ו-6 נקודות אדומות. הוכח שסכום השטחים של משולשים עם 3 קודקודים מסומנים מאותו צבע אינו עולה על רבע מסכום כל שטחי המשולשים עם קודקודים מסומנים.

פתרון. נניח שנקודות A_1, A_2, A_3 הן באותו צבע, ונקודה B היא בצבע אחר. אזי מתקיים אי-שוויון $S_{A_1A_2A_3} \le S_{BA_1A_2} + S_{BA_1A_3} + S_{BA_2A_3}$.
אנחנו נגיד שמשולש הוא **חד-צבעי** אם כל הקודקודים שלו בעלי אותו צבע, ונגיד שמשולש הוא **דו-צבעי** אם יש לו שני קודקודים באותו צבע וקודקוד אחד בצבע שונה.
כמות של משולשים חד-צבעיים היא $\binom{6}{3} \cdot 3 = 20 \cdot 3 = 60$.
נספור את כמות המשולשים הדו-צבעיים. ישנם $\binom{6}{2} \cdot 3$ דרכים לבחור שני קודקודים באותו צבע, ויש 12 קודקודים נוספים בצבע שונה, וזה יוצא

$\binom{6}{2}\cdot 3\cdot 12 = 15\cdot 3\cdot 3\cdot 4 = 60\cdot 9$.

נחבר את כל אי-השוויונים מהסוג שרשמנו בהתחלה. בסכום יופיעו פי 3 פעמים יותר מחוברים באגף ימין מאשר באגף שמאל. כמובן, כל מחובר בצד ימין יופיע אותה כמות של פעמים, וכל מחובר בצד שמאל יופיע אותה כמות של פעמים.
אבל יש פי 9 יותר משולשים דו-צבעיים מאשר חד-צבעיים, ולכן כל מחובר בצד ימין מופיע פי 3 פעמים פחות מאשר כל מחובר בצד שמאל. לכן אם נסמן ב-S_1 את סכום השטחים של המשולשים החד-צבעיים, ונסמן ב- S_2 את סכום השטחים הדו-צבעיים, האי-שוויון שקיבלנו הוא $3nS_1 \le nS_2$, כאשר n מספר טבעי מסוים. לכן $3S_1 \le S_2$.
לכן סכום הכולל של כל השטחים הוא לפחות $4S_1 \le S_1 + S_2$. מש"ל.

3. עבור אילו ערכי k נתן לסמן מספר סופי של נקודות במישור, כך שלכל נקודה מסומנת יש בדיוק k נקודות מסומנות אחרות שהן הכי קרובות אליה?



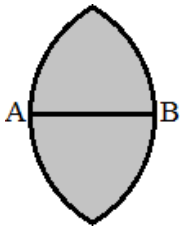
תשובה. $k = 0,1,2,3$.

פתרון. הדוגמא ל-0 זה נקודה בודדת, ל-1 זה שתי נקודות שונות, ל-2 משולש משוכלל. עבור 3 הדוגמה היא קצת יותר מורכבת, והיא מופיע בציור.

עבור $k \ge 4$ לא יכולה להיות דוגמה. אם כן, אז נסמן את המרחק המינימלי שיש לנו ב- d.
כל נקודה שיש לה מרחק d מנקודה אחרת, יש לפחות 4 נקודות במרחק d ממנה, ואפשר גם להגיד על כל הנקודות האלה שיש להן מרחק d ל-4 נקודות לפחות.
לכל נקודה שיש לה נקודות במרחק d ממנו, נשים מטבע עגול בעלת קוטר d שהמרכז שלו יהיה על הנקודה. נקבל אוסף של מטבעות בגודל שווה, שכל אחד מהם נוגע ב-4 מטבעות האחרים, והמטבעות לא עולות זו על זו. כשמסתכלים על המטבע הגבוה היותר, ואם יש כמה כאלה על השמאלי ביותר מבין המטבעות הגבוהים ביותר, רואים שזה לא מסתדר.

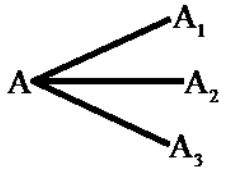
4. קוטר של קבוצה מוגדר להיות המרחק המרבי בין שתי נקודות של קבוצה. הוכח שבקבוצה של n נקודות במישור ניתן למצוא לכל היותר n זוגות של נקודות שהמרחק בינן שווה לקוטר של הקבוצה.

פתרון. נתחיל מלמה:
למה. לכל שני קטרים יש נקודה משותפת.



הוכחה. יהיו A, B נקודות בקבוצה כך ש- AB קוטר. אז כל הנקודות בקבוצה נמצאות בחיתוך של שני עיגולים, שמרכזיהם A ו-B ורדיוסיהם שווים ל-AB (ראה ציור). לא יתכן ששני הקצוות של קוטר כלשהו באותו צד של AB, הרי אז המרחק בינם קטן מ-AB. לכן לכל קוטר של הקבוצה יש נקודה משותפת עם AB.

נחזור לשאלה ונוכיח באינדוקציה על n. עבור $n\le 3$ זה ברור. כעת נניח ש- $n\ge 4$ ונגדיר את הדרגה של כל נקודה בתור כמות הקטרים היוצאים ממנה. נניח שקיימת נקודה A שדרגתה לפחות 3, ונניח ש-AA_1, AA_2, AA_3 הם קטרים היוצאים מ-A בסדר זה, כמו בתמונה. אם מ-A_2 יוצא קוטר נוסף מלבד AA_2 אז לפי הלמה הוא חייב לחתוך גם את AA_1 וגם את AA_3, וזה לא אפשרי. לכן הדרגה של A_2 היא 1 ואנחנו יכולים להוריד אותו ולהקטין גם את מספר הנקודות וגם את מספר הקטרים ב-1, ובמקרה זה השאלה נכונה לפי הנחת האינדוקציה.



מעתה נוכל להניח שדרגת כל נקודה היא 2 לכל היותר. לכן סכום הדרגות הוא לכל היותר $2n$. מצד שני זה פעמיים כמות הקטרים, ולכן יש לכל היותר n קטרים.



הערה. לכל $n\ge 3$ יכולים להיות בדיוק n קטרים בקבוצה של n נקודות. דוגמה אחת לזה היא מניפה (מצנח).

5. מצולע קמור בעל 5775 צלעות חולק למצולעים קמורים בעלי שבע צלעות, כאשר כל צלע של מצולע המקורי היא גם צלע של אחד המצולעים הקטנים. הוכיחו כי יש 4 קודקודים ברצף של המצולע המקורי שהם קודקודים של אותו מצולע בעל 7 צלעות.

פתרון. נחשב את הגודל הממוצע של זוויות של מצולעים בעלי 7 צלעות.
מצד אחד סכום זויות בכל מצולע הוא 5π, ולכן ממוצע הזוויות בכל מצולע הוא $\frac{5}{7}\pi$, ולכן זאת גם הממוצע של כל הזוויות.
נעריך את הממוצע בעוד צורה. בכל קודקוד פנימי שנפגשות בו זוויות שמסתכמות ל-2π יש לפחות 3 זוויות, וממוצע שלהם היא לכל היותר $\frac{2}{3}\pi$. בכל קודקוד פנימי שנמצא על החלק הפנימי צלע של מצולע קטן כלשהו, סכום זוויות לכל היותר π, ויש לפחות שתי זוויות, לכן הממוצע היא לכל היותר $\frac{1}{2}\pi$.
נשאר להבין מה הולך בקודקודים של המצולע הגדול. בממוצע הזוויות של המצולע הגדול קטנות מ-π. אם יש שני קודקודים של המצולע הגדול ברצף, שבכל אחד מהם יש רק מצולע קטן אחד, אז מתקיים מש"ל. אם לא, בכל שני קודקודים רצופים של המצולע הגדול סכום זויות הוא לכל היותר 2π, וכמות הזוויות היא לפחות 3, לכן הממוצע היא קטנה מ-$\frac{2}{3}\pi$. לכן גם ממוצע של כל הזוויות של מצולעים קטנים ליד הקודקודים של המצולע הגדול קטן מ-$\frac{2}{3}\pi$.
ובכן, חילקנו את כל הזוויות למחלקות, ובכל מחלקה הממוצע לא עולה על $\frac{2}{3}\pi$. לכן גם בסה"כ הממוצע לא עולה על $\frac{2}{3}\pi$. לכן $\frac{2}{3}\pi\ge\frac{5}{7}\pi$, לפחות בהנחה שטענת השאלה לא מתקיימת. אבל אז $14\ge 15$ וזה לא הגיוני.

6*. פיצול של קבוצה לשתי קבוצות זרות נקרא חלוקה. לכל קבוצה של N נקודות שונות במישור, ניתן להתבונן ב-
(א) חלוקות באמצעות קו ישר שלא עובר דרך אף נקודה
(ב) חלוקות באמצעות מעגל שלא עובר דרך אף נקודה
מהי הכמות המרבית של חלוקות שיתכנו עבור N מסוים, בכל אחת משתי האפשרויות?

פתרון ראשון. א. הרעיון הוא להפעיל דואליות פרויקטיבית. הישרים יהפכו לנקודות, והנקודות יהפכו לישרים. נסמן לכל נקודה P את הישר הדואלי של ב-P^*, ול $P_1,...,P_N$ ולישר האינסופי של המישור שהיה נקרא ∞.
נבין כיצד להגיד שנקודות P_i ו-P_j נמצאות באותו צד של ישר ℓ כאשר עוברים למישור הפרויקטיבי $\mathbb{RP}^2$. המישור האוקלידי $\mathbb{R}^2$ הוא בעצם $\mathbb{RP}^2\setminus\infty$ (כלומר מישור פרויקטיבי ללא הישר האינסופי). כלומר להגיד ש- P_i ו- P_j באותו חלק של $\mathbb{R}^2\setminus\ell$, זה כמו להגיד שהם באותו החלק של $\mathbb{RP}^2\setminus\left(\ell\cup\infty\right)$ (שני ישרים מחלקים את המישור הפרויקטיבי הממשי לשני רכיבי קשירות).
לאחר דואליות זה שקול לכך, שהנקודות ℓ^* ו-∞^* נמצאות בחלקים שונים של $\mathbb{RP}^2\setminus\left(P_i^*\cup P_j^*\right)$ (תרגיל לקוראים). מכאן נובע, שכמות של חלוקות זה כמות החלקים אליהם מחלקים הישרים $P_1^*,...,P_N^*$ את המישור הפרויקטיבי.
הורדת הישר P_1^* הופך את המישור הפרויקטיבי למישור אוקלידי. הורדת הישר P_2^* מחלקת את המישור האוקלידי לשני חלקים. אם נוריד את הישרים בזה אחר זה, אז הורדת הישר P_k^* חלק מהחלקים הקמורים שיש במישור לשני חלקים. כמות החלקים שיחולקו לשניים שווה לכמות הקטעים אליהם הישר P_k^* מחולק על הישרים הקודמים. אם אף 3 ישרים מבין $P_1^*,...,P_k^*$ לא נפגשים בנקודה אחת (אמירה שקולה לפני דואליות היא: אם אף 3 נקודות מבין $P_1,...,P_k$ לא נמצאים על ישר אחד), אז P_k^* מחולק ל-$k-1$ חלקים (הרי במישור הפרויקטיבי כל שני ישרים נחתכים); אחרת יש פחות חלקים. לכן כמות החלקים אליהם מחולק המישור גודלת ב-$k-1$ ובסוף היא תגיע ל-

$$1+1+2+...+\left(N-1\right)=1+\frac{N\left(N-1\right)}{2}$$

וזה גם כמות החלקים.

ב. נגדיר לכל נקודה $P=\left(x,y\right)$ במישור האוקלידי נקודה במרחב $Q=\left(x,y,x^2+y^2\right)$.
נקרא לפעולה זאת הטלה ממישור לספל פרבולי, כאשר **ספל פרבולי** זו קבוצת כל הנקודות במרחב הנתונות על ידי משוואה $z=x^2+y^2$. זו התאמה חד-חד ערכית ועל בין המישור האוקלידי לספל הפרבולי. משוואת מעגל היא תמיד מהסוג

$$p\left(x,y\right)=x^2+y^2+ax+by+c=0$$

כאשר מציבים בפולינום נקודה שהיא לא על המעגל, אז מקבלים מספר שלילי או חיובי, תלוי האם הנקודה היא בפנים או בחוץ.
לאחר שנעלה את כל הנקודות לספל הפרבולי, יהיה ניתן לרשום את כל משוואה של מעגל באמצעות משוואה ליניארית $z+ax+by+c=0$. לכן מעגלים מתאימים לחתכים של הספל הפרבולי באמצעות מישור. זה לא כולל רק את המישורים האנכיים (מישורים שעבורם המקדם של z הוא 0), שבעצם מתאימים לישרים במישור האוקלידי.

ובכן, מקבלים שאלה שהיא דומה לסעיף הקודם אבל במרחב. יש לנו n נקודות מסומנות במרחב (הנקודות שנוצרו מנקודות המישור על הספל הפרבולי). השאלה היא, כמה חלוקת

ניתן ליצור באמצעות מישורים (אפשר לדבר כאן על כל המישורים, הרי לכל מישור אנכי יש מישור שקרוב אליו שאינו אנכי, אבל יוצר את אותה החלוקה).

באמצעות דואליות פרויקטיבית, כמו שעשינו קודם, ניתן להעביר את השאלה לשאלה של לכמה חלקים המרחב הפרויקטיבי מחולק על ידי N מישורים. לא נפרט את הדואליות, כי זה בדיוק כמו בסעיף הקודם. לכן נשאר לפתור בעצם את הגרסה התלת-ממדית של השאלה הדו-ממדית של סעיף א'.

הוצאת מישור ראשון הופכת את המרחב הפרויקטיבי למרחב אוקלידי. הוצאת כל מישור נוסף מחלקת חלק מהחלקים לשניים. כמות החלקים שהוצאת מישור מספר k תחלק לשני חלקים שווים היא שווה לכמות החלקים שאליהם המישורים הקודמים מחלקים את המישור החדש. בסעיף הקודם קבענו, ש-$k-1$ מישורי מחלקים מישור פרויקטיבי ל-$1+\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ חלקים לכל היותר, והשוויון הוא כאשר אף 3 ישרים במישור שלנו לא נפגשים בנקודה אחת. זה אומר שבעצם שהמישור החדש ואף 3 מישורים קודמים לא נפגשים בנקודה אחד.
לכן אם אנחנו רוצים להוסיף $1+\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ בשלב k ולא פחות, צריך שמבין כל N המישורים הנתונים אף 4 לא נפגשים בנקודה אחת. זאת אומרת שעשינו דואליות, מבין הנקודות המסומנות שהיו, אף 4 לא היו על מישור אחד. דרך שקולה להגיד את זה זה שעוד לפני שהעלנו את הנקודות לספל הפרבולי, אף 4 נקודות לא היו לא על מעגל אחד ולא על ישר אחד. זה מצב שאין בעיה ליצר.
ובכן, במצב המקסימלי (כזה שבו אין 4 נקודות לא על ישר אחד ולא על מעגל אחד) כמות החלוקות יוצא

$$1+\sum_{k=2}^{N}\left(1+\frac{(k-1)(k-2)}{2}\right)=N+\sum_{k=2}^{N}\frac{(k-1)(k-2)}{2}=1+\frac{N(N-1)(N-2)}{6}.$$

פתרון שני. א. קודם נוכיח, שאם שתי ישרים במצב כלשהו יוצרים אותה חלוקה אז אפשרי להזיז את הישר הראשון לשני ברציפות כך שכל הזמן תהיה אותה החלוקה, בלי לגעת בנקודות מסומנות.
ניקח שני ישרים ℓ_1 ו-ℓ_2. נניח שהם נפגשים בנקודה Q ומייצרים אותה חלוקה על הנקודות המסומנות אז מבין 4 הזוויות אליהם הישרים ℓ_1 ו-ℓ_2 מחלקים את המישור, רק בשני זוויות נגדיות יכולות להיות נקודות מסומנות (לו הייתה נקודה בכל אחת מבין בשתי זוויות סמוכות, אז שתי נקודות אלו היו בחלקים שנים ביחס לישר אחד ובאותו החלק ביחס לישר אחר). לכן יש שתי זוויות מנוגדות שאין בהן נקודות מסומנות. אפשר לסובב את ℓ_1 ל-ℓ_2 סביב Q דרך הזוויות האלו.
נניח כעת, ש-ℓ_1 ו-ℓ_2 מקבילים. במקרה זה יש שתי אפשרויות: או שכל הנקודות המסומנות נמצאות בין הישרים המקבילים, או שאף נקודה מסומנת לא נמצאת בין הישרים המקבילים. אם אין אף נקודה בין הישרים, אז אפשר בקלות להזיז ℓ_1 ל-ℓ_2 במקביל.
אם אף נקודה לא נמצאת בין הישרים, נצייר מעגל גדול ממש (נגיד עם רדיוס 1000000) שמכיל את כל הנקודות המסומנות וגם חותך את שני הישרים. אז אפשר באמצעות הזזה מקבילה להרחיק את ℓ_1 מהנקודות המסומנות עד שהוא ישיק למעגל הגדול. לאחר מכאן

נסובב את הישר ב- 180° כך שהוא עדיין ישיק למעגל הגדול. לאחר מכן נקרב את הישר לנקודות המסומנות על ידי הזזה מקבילה, עד שיגיע ל- ℓ_2.

כעת נפתור את השאלה באינדוקציה. ברור לקיפוד, שכאשר יש נקודה אחת, אז יש גם חלוקה אחת: P_1 בצד אחד של הישר, וכלום בצד השני.
נגיד שבאמצעות נקודות $P_1,...,P_k$ במישור ניתן ליצר a_k חלוקות. כמה חלוקות ניתן לייצר אם נוסיף את הנקודה P_{k+1}?
כמובן, חלוקות שישרים שונים מיצרים על $P_1,...,P_k,P_{k+1}$ זהות רק אם החלוקות שהם מיצרים על $P_1,...,P_k$ זהות. אבל יתכן, שיש אותה חלוקה של $P_1,...,P_k$ שמתאימה לשני חלוקות שונות של $P_1,...,P_k,P_{k+1}$: הרי אפשר לצרף את P_{k+1} או למחלקה ראשונה, או למחלקה שנייה. לכן $a_{k+1}=a_k+d$, כאשר d זה כמות החלוקות של $P_1,...,P_k$ שמתאימות להם שתי חלוקות של $P_1,...,P_k,P_{k+1}$.
במקרים אלה קיימים שני ישרים ℓ_1 ו- ℓ_2, שמייצרים אותה חלוקה על $P_1,...,P_k$ אבל לא על $P_1,...,P_k,P_{k+1}$. כמו שהוכחנו, ניתן להזיז ברציפות את ℓ_1 ל- ℓ_2 כך שלאורך כל הדרך תהיה אותה החלוקה של $P_1,...,P_k$. הנקודה P_{k+1} בתהליך זה בהכרח תחליף צד. כלומר בשלב כלשהו נגיע למצב שיש ישר ℓ המגדיר את החלוקה הנתונה.
גם ההפך נכון: אם יש ישר שעובר דרך P_{k+1} שמגדיר חלוקה מסוימת על הנקודות $P_1,...,P_k$, אז אפשר להזיז קצת את ℓ לצד זה או אחר, ובזה לצרף את P_{k+1} לאחת משתי המחלקות לפי בחירתנו. ובכן d (התוספת שצריכה להיות באינדוקציה) שווה למספר החלוקות שאפשר ליצור על ידי הישרים שעוברים דרך d.
כאשר מסובבים ישר ℓ שעובר דרך P_{k+1} סביב P_{k+1} ב- 180° חוזרים לאותו חלוקה שכבר הייתה. החלוקה משתנה, כל פעם כאשר ℓ עובר על פני נקודה אחת מבין הנקודות $P_1,...,P_k$. זה יכול לקרות במהלך הסיבוב k פעמים, אבל יכול גם פחות, אם הנקודה P_{k+1} ושתי נקודה נוספות מבין $P_1,...,P_k$ נמצאות על ישר אחד. אבל אם לא, קל לראות שמתקבל בדיוק $d=k$.
לכן התשובה היא $1+1+...+(N-1)=1+\frac{N(N-1)}{2}$.

ב. אנחנו נוכיח טענה דומה על מעגלים: כאשר יש שני מעגלים כלשהם, שמגדירים אותה חלוקה של הנקודות המסומנות, אז אפשר לשנות את אחד המעגלים ברציפות עד שיהפוך למעגל השני. נרשה לעצמינו גם שבתהליך זה בשלב כלשהו המעגל יוכל להיתקרב לישר ולהפוך לישר, ואז שוב למעגל, (כמו למשל מעגלים שמשיקים לישר מסוים בנקודה מסוימת מצד אחד, שהולכים וגדלים, ואז הופכים לישר זה, ואז הופכים למעגלים שמשיקים לאותה נקודה מצד שני שהולכים וקטנים).
קוד כל תמיד ניתן להזיז את מעגל אחד קצת, כך שהמרכזים בין המעגלים יהיו שונים.
נגיד שמעגל אחד מוגדר על ידי משוואה $p(x,y)=0$ ומעגל שני מוגדר על ידי משוואה $q(x,y)=0$ (כאשר המשוואות הם פולינומים ממעלה 2 ב- x ו- y). כל הנקודות שלא נמצאות על אף אחד משני המעגלים ניתן לחלק לארבעה סוגים, בהתאם לסימנים של

$p(x,y)$ ושל $q(x,y)$. אם יש שתי נקודות מסומנות שמקבלות אותו סימן בפולינום אחד, וסימנים שונים בפולינום אחר, אז זאת לא אותה חלוקה. לכן הסימנים שמקבלים כאשר מציבים את כל הנקודות המסומנות בשני הפולינומים הם או תמיד זהים, או תמיד הפוכים. נוכל להניח שהסימנים תמיד זהים: אם לא, נחליף סימן לאחד הפולינומים.
כעת נתבונן בפולינומים $t\cdot p(x,y)+(1-t)\cdot q(x,y)$, כאשר t משתנה ברציפות מ-0 ל-1. אז לכל t יש סימן זהה לשני המחוברים בכל נקודה מסומנת, לכן הקווים שנקבל האמצע אף פעם לא יעברו דרך אף נקודה מסומנת. קווים אלה הם בעיקר מחוברים, כי הפולינומים הם סכום של קבועים, x, y, ו-$\left(x^2+y^2\right)$ עם מקדמים, אבל יכול להופיע גם ישר, אם x^2+y^2 יתקזז (לא יכול להיות שהכול יתקזז, כי דאגנו שלמעגלים לא יהיה מרכז משותף).

כעת ננסה לעשות שוב אינדוקציה כמו שעשינו קודם. ברור שכאשר יש נקודה אחת בלבד, יש גם חלוקה אחת בלבד.
נגיד שבאמצעות נקודות $P_1,...,P_k$ במישור ניתן ליצר b_k חלוקות. כמה חלוקות ניתן לייצר אם נוסיף את הנקודה P_{k+1}?
כל חלוקה של נקודות $P_1,...,P_k,P_{k+1}$ על ידי מעגל נותנת גם חלוקה של נקודות $P_1,...,P_k$ על ידי מעגל. אבל יתכן שחלוקות מסוימות של $P_1,...,P_k$ על ידי מעגל מתאימות לחלוקות שונות של $P_1,...,P_k,P_{k+1}$. בדומה למה שעשינו בסעיף הקודם, $b_{k+1}=b_k+\delta$, כאשר δ זה מספר החלוקות שאפשר ליצר באמצעות מעגלים, שעוברים דרך P_{k+1}.

כעת נבצע אינברסיה עם מרכז ב-P_{k+1}. הנקודות $P_1,...,P_k$ יעברו לנקודות $P_1,...,P_k$, והמעגלים דרך P_{k+1} יעברו לישרים. לכן השאלה של מציאת δ תעבור לשאלה כזאת: כמה חלוקות של נקודות $P_1,...,P_k$ אפשר ליצר באמצעות ישרים? זאת בדיוק השאלה שפתרנו בסעיף הקודם. התשובה הייתה ש-δ הוא לכל היותר $1+\frac{k(k-1)}{2}$, והשוויון מתקיים כאשר אף 3 נקודות מבין $P_1,...,P_k$ על ישר אחד. זה שקול לכך, שאף 3 נקודות מבין $P_1,...,P_k$ לא נמצאות על מעגל אחד או ישר אחד ביחד עם P_{k+1}.
כלומר על מנת שנגיע לכל $k=2,...,N$ לתוספת δ מקסימלית, מספיק לדרוש שאף 4 נקודות מבין $P_1,...,P_N$, לא על ישר אחד ולא על מעגל אחד, ואז כמות החלוקות היא

$$1+\sum_{k=2}^{N}\left(1+\frac{(k-1)(k-2)}{2}\right)$$

כבר חישבנו את הערך של הביטוי בסוף של הפתרון הראשון.