תרגיל 17

1. במחומש קמור נבחרה נקודה M. קודקוד של המחומש יקרא מוצלח, אם הישר שעובר דרך הקודקוד ודרך M חותך את הצלע הנגדית לקודקוד בנקודה פנימית (למשל לקודקוד A במחומש ABCDE הצלע הנגדית היא CD). הראו כי במחומש יש מספר אי-זוגי של קודקודים מוצלחים.

2. במישור סומנו 6 נקודות כחולות, 6 נקודות ירוקות ו-6 נקודות אדומות. הוכח שסכום השטחים של משולשים עם 3 קודקודים מסומנים מאותו צבע אינו עולה על רבע מסכום כל שטחי המשולשים עם קודקודים מסומנים.

3. עבור אילו ערכי k נתן לסמן מספר סופי של נקודות במישור, כך שלכל נקודה מסומנת יש בדיוק k נקודות מסומנות אחרות שהן הכי קרובות אליה?

4. קוטר של קבוצה מוגדר להיות המרחק המרבי בין שתי נקודות של קבוצה. הוכח שבקבוצה של n נקודות במישור ניתן למצוא לכל היותר n זוגות של נקודות שהמרחק בינן שווה לקוטר של הקבוצה.

5. מצולע קמור בעל 5775 צלעות חולק למצולעים קמורים בעלי שבע צלעות, כאשר כל צלע של מצולע המקורי היא גם צלע של אחד המצולעים הקטנים. הוכיחו כי יש 4 קודקודים ברצף של המצולע המקורי שהם קודקודים של אותו מצולע בעל 7 צלעות.

6*. פיצול של קבוצה לשתי קבוצות זרות נקרא חלוקה. לכל קבוצה של N נקודות שונות במישור, ניתן להתבונן ב-

(א) חלוקות באמצעות קו ישר שלא עובר דרך אף נקודה

(ב) חלוקות באמצעות מעגל שלא עובר דרך אף נקודה

מהי הכמות המרבית של חלוקות שיתכנו עבור N מסוים, בכל אחת משתי האפשרויות?