תרגיל 16

1. האם קיימים פולינומים ממעלה שנייה f,g,h בעלי מקדמים ממשיים, כך שהמספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ו-8 הם שורשים של $f\left(g\left(h\left(x\right)\right)\right)$?

תשובה. לא.

פתרון. כאשר פולינום p הוא ממעלה 2, אז למשוואה $p\left(x\right)=a$ בהינתן a יש שני פתרונות. לכן פולינום יכול להעביר רק שני מספרים לאותו מספר.

לכן במקרה שלנו, המספרים $h(1),h(2),h(3),...,h(8)$ זה לפחות 4 מספרים שונים, ולכן $g\left(h(1)\right),g\left(h(2)\right),...,g\left(h(8)\right)$ זה לפחות 2 מספרים שונים, אבל נתון גם שהמספרים $f\left(g\left(h(1)\right)\right),...,f\left(g\left(h(8)\right)\right)$ כולם זהים. זה אומר שכל פעם שאמרנו "לפחות" היה אפשר להגיד בדיוק, למשל: $h(1),h(2),h(3),...$ זה בדיוק 4 מספרים שונים.

נזכר גם, שכל פולינום מדרגה 2 ניתן להציג בתור

$$p\left(x\right)=ax^2+bx+c=a\left(x-k\right)^2+d,$$

כאשר $k=-\frac{b}{2a}$. לפעמים קוראים ל-k "קודקוד", כי כאשר מציירים את הגרף של הפולינום, אז הנקודה $\left(k,p\left(k\right)\right)$ היא הקודקוד של הפרבולה.

בכל מקרה, $p\left(x_1\right)=p\left(x_2\right)$ אך ורק כאשר x_1,x_2 נמצאים באותו מרחק מ-k, יכול להיות מצדדים שונים.

המרחקים מהקודקוד של h למספרים $1,2,3,...,8$ הם רק 4 מספרים שונים. לכן הקודקוד של h הוא 4.5. לכן עבור מספר d מסוים, הערכים $h(1),...,h(8)$ בם

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+d\ ,\ \left(\tfrac{3}{2}\right)^2+d\ ,\ \left(\tfrac{5}{2}\right)^2+d\ ,\ \left(\tfrac{7}{2}\right)^2+d,$$

כאשר כל ערך מופיע פעמיים.

את הערכים האלה g צריך להדביק בזוגות. לכן המרחקים מהערכים האלה למספר m ממשי, שהוא הקודקוד של g, צריכים להיות שווים בזוגות. לכן m נמצא בדיוק באמצע בין 2 ערכים קיצוניים, וגם באמצע בין שני ערכים אמצעים. אבל אז

$$\frac{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+d+\left(\tfrac{7}{2}\right)^2+d}{2}=\frac{\left(\tfrac{3}{2}\right)^2+d+\left(\tfrac{5}{2}\right)^2+d}{2}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{7}{2}\right)^2=\left(\tfrac{3}{2}\right)^2+\left(\tfrac{5}{2}\right)^2$$

$$1^2+7^2=3^2+5^2$$

זה לא נכון, וכך קיבלנו סתירה לקיום של f,g,h.

2. עבור אילו ערכי n הפולינום $x^{17}+nx^{16}+3$ פריק מעל שלמים?
(כלומר מכפלה של שני פולינומים בעלי מקדמים שלמים ודרגה גדולה מ-1)

תשובה כאשר $n=-4$ או $n=-2$.

פתרון. נניח שהפולינום הוא מכפלה של שני פולינומים עם מקדמים שלמים:

$$x^{17}+nx^{16}+3=p(x)\cdot q(x)$$

כאשר המקדמים $p(x)=a_kx^k+...+a_1x+a_0$, $q(x)=b_mx^m+...+b_1x+b_0$, כאשר $a_0,...,a_k,b_0,...,b_m$ שלמים, $k,m>0$, $a_k,b_m\neq 0$. בעצם כל להבין כי $a_k=b_m=\pm 1$, ואפילו לה"כ $a_k=b_m=1$.

הזהות נכונה במספרים שלמים, לכן היא נכונה גם מודולו 3:

$$x^{17}+nx^{16}=\left(a_kx^k+...+a_1x+a_0\right)\left(b_mx^m+...+b_1x+b_0\right)\pmod 3$$

$$(x+n)x^{16}=\left(a_kx^k+...+a_1x+a_0\right)\left(b_mx^m+...+b_1x+b_0\right)\pmod 3$$

כלומר מודולו 3 אחד הפולינומים, נגיד p , הוא x^k, והשני, נגיד q, הוא $(x+n)x^{m-1}$.

אבל לא יתכן כי $a_0=0=b_0\pmod 3$, הרי אז a_0,b_0 שניהם מתחלקים ב-3, ואז בהכרח $a_0\cdot b_0=3$ צריך להתחלק ב-9 והוא לא. לכן בהכרח $m-1=0$, כלומר הפירוק הוא מכפלה של שני הפולינומים כמכפלה של פולינומים מדרגות 16 ו-1. לכן לפולינום יש שורש שלם.

כידוע, שורש שלם של פולינום עם מקדם חופשי 3 ומקדם מוביל 1 יכול להיות ± 1 או ± 3. לכן בפולינום פריק כאשר אחד מבין 4 מספרים אלה הוא שורש שלו.

אם ± 3 הוא שורש נקבל $\pm 3^{17}+n\cdot 3^{16}+3=0$. זה לא סביר, כי שני המחוברים הראשונים מתחלקים ב- 3^{16} והמחובר השלישי לא.

אם ± 1 הוא שורש נקבל $\pm 1+n+3=0$. זה עשוי להתקיים, אך ורק כאשר

$$n=-3\mp 1=-4,-2.$$

3. נתון פולינום p מתוקן (מקדם מוביל = 1) שדרגתו גדולה מ-0. האם יתכן, שלכל x שלם או חצי-שלם, $p(x)$ יהיה מספר שלם?

תשובה. לא קיים.

פתרון. נניח שפולינום כזה קיים.

אם כך, לכל מספר n שלם $p\left(\frac{n}{2}\right)$ הוא שלם. נסמן $q(n)=p\left(\frac{n}{2}\right)$.

נניח כי $\deg p=k$, כלומר $p(x)=x^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_0$. אז גם דרגה של q היא k, והמקדם המוביל של q הוא $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. יחד עם זאת, לכל n שלם $q(n)$ שלם.

טענה 1. אם $q(x)=b_kx^k+...+b_1x+b_0$, ולכל n שלם $q(n)$ שלם, אז בהכרח $b_j\cdot k!$ שלם, לכל j.

טענה 2. המספר $\frac{k!}{2^k}$ אינו שלם.

שתי הטענות ביחד מהוות סתירה לקיום הפולינום (מקדם מוביל לא מקיים את התנאי שהוא חייב לקיים), לכן q לא קיים ולכן גם p לא.

נשאר להוכיח את שתי הטענות.

הוכחת טענה 1. אנשים מסוימים (אבל לא חורפנים כמובן) עלולים לחשוב, שאם לפולינום יש ערכים שלמים בנקודות שלמות, אז המקדמים גם שלמים. זה כמובן לא נכון. דוגמה הכי פשוטה שמפריכה השערה זו היא $\frac{x(x+1)}{2}$. בעצם, אנו נבנה סדרה שלמה של פולינומים כאלה:

$$\begin{aligned}
&p_0(x)=1,\\
&p_1(x)=x,\\
&p_2(x)=\frac{x(x-1)}{2},\\
&p_3(x)=\frac{x(x-1)(x-2)}{6},\\
&\ldots\\
&p_k(x)=\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)}{k!}
\end{aligned}$$

קל לראות שחוץ מהפולינומים האפסי והראשון, לכל הפולינומים ברשימה זו המקדמים לא יהיו שלמים אחרי שנפתח סוגריים. אנחנו נוכיח שתי תכונות נוספות של הסדרה הזו: שכל אחד מהפולינומים מקבל ערכים שלמים בנקודות שלמות, ושכל פולינום q מדרגה k או פחות שמקבל ערכים שלמים בנקודות שלמות ניתן להציג בצורה

$$q=a_0p_0+a_1p_1+\ldots+a_kp_k$$

כאשר $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_k$ הם מספרים שלמים.

את התכונה הראשונה נוכיח באינדוקציה. ברור לקיפוד ש-$p_0(n)$ שלם.

נשים לב כי

$$\begin{aligned}
&p_{j+1}(n+1)-p_{j+1}(n)=\\
&=\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-j+1)}{(j+1)!}-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-j)}{(j+1)!}=\\
&=\frac{n(n-1)\ldots(n-j+1)}{(j+1)!}\cdot\big((n+1)-(n-j)\big)=\frac{n(n-1)\ldots(n-j+1)}{(j+1)!}\cdot(j+1)=\\
&=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-j+1)}{j!}=p_j(n)
\end{aligned}$$

לכן אם הוכחנו כבר שלכל n, המספר $p_j(n)$ שלם, אז $p_{j+1}(n+1),p_{j+1}(n)$ חייבים להיות בו-זמנית שלמים או לא שלמים. מכאן באינדוקציה, או שלכל n שלם $p_{j+1}(n)$ הוא שלם, או שלכל n שלם $p_{j+1}(n)$ אינו שלם. אבל $p_{j+1}(0)=0$.

בזה הוכחנו את התכונה הראשונה. כעת נוכיח את התכונה השנייה: כל פולינום q מדרגה k או פחות שמקבל ערכים שלמים בנקודות שלמות ניתן להציג בצורה

$$q=a_0p_0+a_1p_1+\ldots+a_kp_k$$

כאשר $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_k$ הם מספרים שלמים.

קודם נשים לב, שלכל i שלם בתחום $0 \le i < j$, נקבל

$$p_j(i) = \frac{i(i-1)\cdot\ldots\cdot(i-j+1)}{j!} = 0$$

אבל $p_j(j) = \frac{j(j-1)\cdot\ldots\cdot(j-j+1)}{j!} = 1$.

כלומר p_j מתאפס ב-$0,1,\ldots,j-1$ אבל שווה ל-1 ב-j.

ובכן, ניקח פולינום q מדרגה k שמקבל ערכים שלמים בנקודות שלמות. בעצם, להוכחה שלנו מספיק לבקש שהוא מקבל ערכים שלמים בנקודות $0,1,2,\ldots,k$. ניקח $a_0 = q(0)$.

אז הפולינום $q_1(x) = q(x) - a_0 p_0(x)$ מתאפס ב-0. נגדיר $a_1 = q_1(1)$.

אז הפולינום $q_2(x) = q(x) - a_1 p_1(x)$ מתאפס ב-0 וב-1. נגדיר $a_2 = q_2(x)$.

אז הפולינום $q_3(x) = q_2(x) - a_2 p_2(x)$ מתאפס ב-$0,1,2$.

נמשיך בתהליך זה, עד שנקבל את הפולינום

$$q_k(x) = q(x) - a_0 \cdot p_0(x) - a_1 \cdot p_1(x) - \ldots - a_k \cdot p_k(x)$$

וזה פולינום מדרגה k לכל היותר, שמתאפס ב-$k+1$ נקודות: $0,1,2,\ldots,k$.

לכן הוא שווה ל-0 זהותית. לכן $q(x) = a_0 \cdot p_0(x) + a_1 \cdot p_1(x) + \ldots + a_k \cdot p_k(x)$.

קל לראות, שאם נכפיל את הפולינום ב-$k!$ נקבל פולינום בעל מקדמים שלמים.

הוכחת טענה 2. אנחנו רוצים להוכיח, כי $\frac{k!}{2^k}$ אינו מספר שלם לאף $k > 0$.

המספר $k!$ מוגדר כמכפלה ארוכה $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k$, כאשר כל גורם ניתן לרשום בתור מכפלה של מספרים ראשוניים ולבדוק כמה פעמים מופיע 2.

סה"כ במכפלה זו יש $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ מספרים זוגיים, שכל אחד מהם תורם 2 למכפלה. מצד שני, יש בדיוק $\left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor$ מספרים שמתחלקים ב-4, שכל אחד מהם תורם 2 נוסף למכפלה. יש $\left\lfloor \frac{k}{8} \right\rfloor$ גורמים שמתחלקים ב-8, שכל אחד מהם תורם עוד 2, וכך הלאה. סה"כ נקבל שהדרגה שבה 2 מופיע בפירוק של המכפלה לגורמים ראשוניים היא בדיוק

$$d = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{16} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{k}{2^m} \right\rfloor +$$

זה טור אינסופי, שאפשר לעצור את הסכימה לאחר מספר סופי של חיבורים, כאשר $2^m > k$, אבל אנחנו נעדיף לכתוב את זה דווקא בתור טור אינסופי. לו היינו נפתרים מחלק שלם בביטוי, היינו מקבלים מספר שגדול ממש מ-d, הרי יש בתור זה הרבה מספרים שקרובים ל-0 אבל עדיין חיוביים. לכן

$$d < \frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \frac{k}{8} + \frac{k}{16} + \ldots = k$$

לכן 2^k זו חזקה יותר גדולה של 2 מחזקת 2 שיש בפירוק של $k!$ לגורמים ראשוניים.

4. נתונים פולינומים f ו-g בעלי מקדמים שלמים אי-שליליים. נתון שהמקדם הגדול ביותר של f שווה ל-m. נתון שלשני מספרים טבעיים שונים a ו-b מתקיים $f(a)=g(a)$, וכן $f(b)=g(b)$. הוכיחו שאם $m<b$, אז הפולינומים f ו-g מתלכדים.

פתרון. כל המקדמים של f קטנים מ-b. לו היה אפשר להגיד, שגם כל המקדמים של g קטנים מ-b, אז התנאי $f(b)=g(b)$ היה מספיק על מנת להוכיח כי $f=g$. אכן, כאשר מסתכלים על $f(b)$ בבסיס ספירה b, וכל המקדמים שלו קטנים מ-b, מקבלים שהספרות של המספר הם בדיוק המקדמים של הפולינום. ואם שני המספרים שווים, אז הספרות שלהם שוות.
נעבור למקרה הכללי. נגיד שלפולינום g יש מקדם c שגדול מ-b. ניתך להשתמש בחלוקה עם שארית ולרשום: $c=bk+r$, כאשר $r<b$. כעת ברישום של g ניתן להחליף את c בביטוי $bx+r$, ולקבל פולינום חדש, $\tilde{g}$ במקום g.
קל לראות שזה עדיין פולינום בעל מקדמים שלמים, ש-$\tilde{g}(b)=g(b)$, אבל $\tilde{g}(a)>g(a)$, וסכום המקדמים הוקטן. אם גם ל-$\tilde{g}$ יש מקדם שגדול מ-b, ניתן לחזור על הפעולה שוב ושוב. תהליך זה לא יכול להיות אינסופי, הרי המקדמים טבעיים, וסכום המקדמים קוטן בכל שלב.
בסופו של דבר נקבל פולינום h שכל מקדמיו קטנים מ-b במקום g, עבורו $h(b)=g(b)=f(b)$, אבל $h(a)<g(a)=f(a)$. לכן לפי מה שהוכחנו בהתחלה h ו-f זה אותו פולינום, אבל הם מקבלים ערכים שונים ב-a, סתירה.

5. נתונים פולינום $P(x)$ עם מקדמים שלמים שדרגתו $n>1$, ומספר טבעי k. בונים פולינום נוסף $Q(x)=P\left(P\left(...P\left(P(x)\right)...\right)\right)$, כאשר מפעילים P בדיוק k פעמים.
הוכיחו שקיימים לכל היותר n ערכים שלמים t עבורם מתקיים $Q(t)=t$.

פתרון. ניזכר בטענה ידועה: לכל שני מספרים שלמים x_1,x_2 ולכל פולינום $P(x)$ בעל מקדמים שלמים, $P(x_1)-P(x_2)$ מתחלק ב-x_1-x_2.
מזה נובע, שבהינתן המרחק $|x_1-x_2|$, המרחק $|P(x_1)-P(x_2)|$ יכול לעשות אחד מבין 3 דברים:
(א) להפוך ל-0
(ב) להישאר כמו קודם.
(ג) לגדול פי 2, 3, או מספר שלם אפיל ויותר גדול.
נרשום את כל המספרים השלמים השונים שמקיימים $Q(t)=t$ בשורה.
נרשום עוד שורה: מתחת לכל מספר x בשורה הבאה נרשום $P(x)$.
נחזור על הפעולה מספר פעמים, כמו מספר ההרכבות של P בהגדרה של Q.
אז בשורה האחרונה נבל את אותם המספרים שהיו בשורה הראשונה.

אם נתבונן בשתי עמודות כלשהן בטבלה שתיווצר, נראה שכל פעם שעוברים נשורה לשורה הבאה מתרחש אחד מ-3 הדברים שדיברנו אליהם: המרחק או מתאפס, או נשמר, או עולה. כל להבין שהמרחק בעצם לא מתאפס: אם שני ערכים באותה שורה ובעמודות שונות יתלכדו, אז הם כבר ימשיכו להתלכד בכל השורות שיהיו בהמשך, ולא יחזרו להיות שונים בשורה אחרונה.
לכן המרחקים בכל שלב נשמרים או עולים. אבל בסוף חוזרים למרחק המקורי, לכן הם לא יכולים לעלות אף פעם. לכך בכל שלב המרחקים נשמרים.
נניח בשלילה, שבשורה ראשונה רשומים מעל n מספרים שונים: $x_0, x_1, ..., x_n$ ואולי עוד מספרים. הפולינום P מעביר אותם ל-$P(x_0), P(x_1), ..., P(x_n)$, עם שמירה על המרחקים. כל העתקה שומרת מרחקים של $\mathbb{R}$ היא הזזה או שיקוף, לכן ניתן לייצג אותה בתור פונקציה ליניארית $\ell(x) = a \pm x$.
לכן עבור $x_0, x_1, ..., x_n$ מתקיימת הזהות $P(x) = \ell(x)$ או במילים אחרות $P(x) - \ell(x) = 0$. אבל P זה פולינום מדרגה $n > 1$, לכן גם $P - \ell$ זה פולינום מדרגה n, והוא לא יכול להתאפס ב-n נקודות. סתירה.

6. כל המקדמים של פולינום $p(x)$ הם מספרים שלמים אי-שליליים שאינם עולים על 9. הוכיחו כי אם $p(10)$ הוא מספר ראשוני, אז $p(x)$ אי-פריק בשלמים, כלומר הוא לא מכפלה של שני פולינומים שלמים בעלי דרגות חיוביות.

פתרון. ההוכחה תהיה מבוססת על הטענות הבאות:

טענה 1. נניח שכל המקדמים של פולינום p הם מספרים שלמים בין 0 ל-9. נניח ש-α הוא שורש מרוכב של p. אז או ש-$\operatorname{Re}\alpha < 0$, או ש-$|\alpha| < 4$. כמסקנה, $\operatorname{Re}\alpha < 4$.

טענה 2. נניח שפולינום p בעל מקדמים שלמים ומספר טבעי b מקיימים את התנאים הבאים בו-זמנית:
(א) לכל שורש α של p, מתקיים $\operatorname{Re}\alpha < b - \frac{1}{2}$.
(ב) המספר $p(b)$ ראשוני.
(ג) $p(b-1) \neq 0$.
אז p אי-פריק (מעל שלמים).

בהנחה שיודעים כבר את שתי הטענות, לא קשה לפתור את השאלה. מציבים את $b = 10$ בטענה 2, אז מספיק לבדוק את התנאים. תנאי (ב) נתון, תנאי (ג) די ברור כי כל המקדמים אי-שליליים וחלק חיוביים, אז גם $p(9) > 0$. תנאי (א) מתקבל לפי טענה 1.
נשאר להוכיח את הטענות.

הוכחת טענה 2. נניח בשלילה כי p הוא מכפלה של שני פולינומים בעלי מקדמים שלמים: $p(x) = q(x) \cdot r(x)$. כל השורשים של p, q, r מקיימים: $\operatorname{Re} < b - \frac{1}{2}$.

לכן השורשים של $q\left(b-\frac{1}{2}+x\right)$ כולם מקיימים $\mathrm{Re}<0$. ניתן לרשום

$$q\left(b-\tfrac{1}{2}-x\right)=B\cdot\prod\left(x-\beta_i\right),$$

כאשר A הוא המקדם המוביל של q, והמספרים β_i הם מספרים שמקיימים $\mathrm{Re}\,\beta_i>0$. היות ול-q יש מקדמים ממשיים, אז β_i הם מספרים שחלקם ממשיים שליליים, ואחרים ניתן לסדר בזוגות של מספרים צמודים. לכן ניתן לסדר את המכפלה כך, שיהיו גורמים ליניאריים עם מקדמים חיוביים, וגורמים ריבועים מהסוג

$$\left(x-\beta\right)\left(x-\bar{\beta}\right)=x^2-\left(2\mathrm{Re}\,\beta\right)\cdot\beta+\left|\beta\right|^2$$

כלומר גם עם מקדמים ריבועים. כלומר $Q(x)=\prod\left(x-\beta_i\right)$ זה מכפלה של פולינומים עם מקדמים חיוביים, כלומר פולינום עם מקדמים חיוביים. לכן

$$Q\left(\tfrac{1}{2}\right)>Q\left(-\tfrac{1}{2}\right).$$

לכן $\left|q\left(b-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right|=\left|B\cdot Q\left(\frac{1}{2}\right)\right|>\left|B\cdot Q\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\left|q\left(b-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right|$

כלומר $\left|q(b)\right|>\left|q(b-1)\right|$.

כל מה שאמרנו על q, ניתן להגיד גם על הגורם השני. לכן

$$\left|p(b)\right|=\left|q(b)\cdot r(b)\right|=\left|q(b)\right|\cdot\left|r(b)\right|$$

כל אחד מהגורמים במכפלה האחרונה הוא מספר שלם, אבל $\left|q(b)\right|>\left|q(b-1)\right|>0$ הרי $q(b-1)$ גם מספר שלם, ושונה מ-0, כי $0\neq p(b-1)=q(b-1)\cdot r(b-1)$. לכן $\left|q(b)\right|\geq 2$. כמו כן גם $\left|r(b)\right|\geq 2$. לכן פירקנו $\left|p(b)\right|$ למכפלה של שני גורמים, לכן זה לא מספר ראשוני בניגוד להנחה.

הוכחת טענה 1. נזכיר את הניסוח: נניח כי $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=0$ כאשר $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n\in\{0,1,2,3,\ldots,9\}$, וגם $a_n\neq 0$. אם בנוסף $\mathrm{Re}\,x\geq 0$ אז $|x|<4$.

נעביר את כל המחוברים חוץ משני המונומים המובילים ימינה, ונחלק את המשוואה ב-x^n (אם $x=0$ ואסור לחלק אז הטענה ברורה). נקבל

$$a_n+\frac{a_{n-1}}{x}=-\left(\frac{a_{n-2}}{x^2}+\frac{a_{n-2}}{x^3}+\ldots+\frac{a_0}{x^n}\right)$$

נשים לב כי $\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{x}\right|\geq\mathrm{Re}\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}\right)\geq 1$, ולכן $\mathrm{Re}\left(\frac{a_{n-1}}{x}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{a_{n-1}\bar{x}}{|x|^2}\right)\geq 0$.

לכן גם $\left|\frac{a_{n-2}}{x^2}+\frac{a_{n-2}}{x^3}+\ldots+\frac{a_0}{x^n}\right|=\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{x}\right|\geq 1$. אבל אם $|x|>1$

$$\left|\frac{a_{n-2}}{x^2}+\frac{a_{n-2}}{x^3}+\ldots+\frac{a_0}{x^n}\right|\leq\left|\frac{a_{n-2}}{x^2}\right|+\left|\frac{a_{n-2}}{x^3}\right|+\ldots+\left|\frac{a_0}{x^n}\right|\leq$$

$$\leq\frac{9}{|x|^2}\cdot\left(1+\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x|^2}+\ldots\right)=\frac{9}{|x|^2}\Big/\left(1-\frac{1}{|x|}\right)=\frac{9}{|x|^2-|x|}$$

ולכן תנאי הכרחי הוא ש- $\frac{9}{|x|^2-|x|}\le 1$ כלומר $|x|\cdot(|x|-1)<9$. כמובן זה לא מתקיים כאשר $|x|\ge 4$ (ואפשר אפילו קצת לשפר את החסם).