תרגיל 16

1. האם קיימים פולינומים ממעלה שנייה f,g,h בעלי מקדמים ממשיים, כך שהמספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ו-8 הם שורשים של $f\left(g\left(h\left(x\right)\right)\right)$?

2. עבור אילו ערכי n הפולינום $x^{17}+nx^{16}+3$ פריק מעל שלמים?
(כלומר מכפלה של שני פולינומים בעלי מקדמים שלמים ודרגה גדולה מ-1)

3. נתון פולינום p מתוקן (מקדם מוביל $=1$) שדרגתו גדולה מ-0. האם יתכן, שלכל x שלם או חצי-שלם, $p\left(x\right)$ יהיה מספר שלם?

4. נתונים פולינומים f ו-g בעלי מקדמים שלמים אי-שליליים. נתון שהמקדם הגדול ביותר של f שווה ל-m. נתון שלשני מספרים טבעיים שונים a ו-b מתקיים $f\left(a\right)=g\left(a\right)$, וכן $f\left(b\right)=g\left(b\right)$. הוכיחו שאם $m<b$, אז הפולינומים f ו-g מתלכדים.

5. נתונים פולינום $P\left(x\right)$ עם מקדמים שלמים שדרגתו $n>1$, ומספר טבעי k. בונים פולינום נוסף $Q\left(x\right)=P\left(P\left(...P\left(P\left(x\right)\right)...\right)\right)$, כאשר מפעילים P בדיוק k פעמים. הוכיחו שקיימים לכל היותר n ערכים שלמים t עבורם מתקיים $Q\left(t\right)=t$.

6. כל המקדמים של פולינום $p\left(x\right)$ הם מספרים שלמים אי-שליליים שאינם עולים על 9. הוכיחו כי אם $p\left(10\right)$ הוא מספר ראשוני, אז $p\left(x\right)$ אי-פריק בשלמים, כלומר הוא לא מכפלה של שני פולינומים שלמים בעלי דרגות חיוביות.