<u>תרגיל 15</u>

1. מצאו את כל הרביעיות a,b,c,d של מספרים שלמים חיוביים עבורן $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$.

תשובה. כל התשובות האפשריות עד כדי סדר המספרים הם:
$(4,4,4,4)$, $(3,3,6,6)$, $(3,3,4,12)$, $(3,4,4,6)$,
$(2,6,6,6)$, $(2,5,5,10)$, $(2,4,8,8)$, $(2,4,6,12)$, $(2,4,5,20)$,
$(2,3,7,42)$, $(2,3,8,24)$, $(2,3,9,18)$, $(2,3,10,15)$, $(2,3,12,12)$.

פתרון. נניח כי $a\le b\le c\le d$ (אחר כך נוסף תמורות של תשובות שמתקבלות).
אז $1=\frac{1}{d}+...+\frac{1}{a}\ge\frac{4}{a}$ ולכן $a\le 4$. כמובן $a\ge 2$, וזה משאיר 3 מקרים עבור a.
נבדוק את המקרים האלה אחד-אחד (הגישה השנייה היא להתבכיין והיא רק עבור שמנים).

(א) כאשר $a=4$ אז באי-שוויון שרשמנו יש שוויון, לכן $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$ וגם $\frac{1}{a}=\frac{1}{c}$ וכן $\frac{1}{a}=\frac{1}{d}$ כלומר $4=a=b=c=d$.

(ב) כאשר $a=3$ אז $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{2}{3}$. מכאן $\frac{1}{b}\ge\frac{2}{9}$, כלומר $3=a\le b\le\frac{9}{2}=4.5$. לכן b הוא 3 או 4.

(ב1) אם גם $b=3$ אז $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{3}$ ולכן מאותו שיקול כמו קודם $\frac{1}{c}\ge\frac{1}{6}$ כלומר $3\le c\le 6$ ואז $\frac{1}{d}=\frac{1}{3}-\frac{1}{c}$. כאשר מציבים עבור c במשוואה זו 3, 4, 5, 6 מקבלים כי $\frac{1}{3}-\frac{1}{c}$ שווה ל- 0, $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{6}$, ורק בשתי אפשרויות מתקבל מספר מסוג $\frac{1}{d}$.

(ב2) אם $b=4$ אז $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$. במקרה זה $\frac{1}{c}\ge\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{24}$, ולכן $4=b\le c\le\frac{24}{5}<5$, וזה קובע ביחידות כי $c=4$ ולכן $\frac{1}{d}=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{2}{12}$ כלומר $d=\frac{1}{6}$.

(ג) מחלקה אחרונה של המקרים $a=2$, ואז $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}$, ואז $\frac{1}{b}\geq\frac{1}{6}$. קל לראות גם שאסור לקחת גם $b=2$ כי הסכום יוצא גדול מדי, לכן $3\leq b\leq 6$. נבדוק את המקרים:

(ג1) אם $b=6$ אז $\frac{1}{2}=\frac{3}{b}\geq\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}$ וכל אי-שוויון כאן הופך לשוויון, לכן $b=c=d=6$.

(ג2) אם $b=5$ נראה שגם יש מאט אפשרויות. אכן, $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$. לכן $\frac{1}{c}\geq\frac{3}{20}$, כלומר $7>\frac{20}{3}\geq c\geq b=5$, וזה משאיר לנו רק שתי אופציות: c שווה ל-5 או ל-6. והרי $\frac{1}{d}=\frac{3}{10}-\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$ היא אופציה טובה, אבל $\frac{1}{d}=\frac{3}{10}-\frac{1}{6}=\frac{9-5}{30}=\frac{2}{15}$ היא לא תשובה תקינה.

(ג3) אם $b=4$ נקבל $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{4}$. מהשיקול הרגיל שלנו רואים כי $5\leq c\leq 8$, ואז לפי c המספר d נקבע ביחידות כאשר זה עובד, כלומר $\frac{1}{d}=\frac{c-4}{4c}$, כלומר צריך ש-$c-4$ יחלק את $4c$, כאשר $c-4$ הוא 1, 2, 3 או 4. האפשרויות 1, 2, 4 עבור $c-4$ תקינות ונותנות ערכים 5, 6, 8 עבור c בהתאמה, וערכים 20, 12, 8 עבור d בהתאמה. האפשרות $c-4=3$ לא נותנת תשובה תקינה, הרי $4\cdot 7$ לא מתחלק ב-3.

(ג4) אם $b=3$, זה סוג אחרון שנשאר לבדוק. אז $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. לכן מהשיקול הרגיל $6<c\leq 12$. נרשום $c=6+k$, ואז $\frac{1}{d}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6+k}=\frac{k}{6(6+k)}$. כאשר $0<k\leq 6$ ובנוסף $6(6+k)$ מתחלק ב-k אבל $\gcd(k,6)=\gcd(k,6+k)$ כלומר בעצם צריך ש-6^2 יתחלק ב-k. מחלקי 36 שאינם עולים על 4 הם 1, 2, 3, 4, 6. ערכים מתאימים של c הם 7, 8, 9, 10, 12, וערכי d הם 42, 24, 18, 15, 12.

2. הראו שאם למספר שלם כלשהו n יש למשוואה $x^2+4y^2=z^2+n$ פתרון בשלמים, אז יש למשוואה זו אינסוף פתרונות בשלמים.

פתרון. ניתן לרשום באופן שקול $4y^2-n=z^2-z^2=(z-x)(z+x)$.
הגורמים $u=z-x$, $v=z+x$ הם מאותה זוגיות. מצד שני, אם נצליח עבור y מסוים לפרק את $4y^2-n$ לגורמים $u\cdot v$ שהם מאותה זוגיות, אז נוכל לכתוב $z=\frac{1}{2}(u+v)$, $x=\frac{1}{2}(v-u)$, ולמצוא פתרון למשוואה שלנו. זה אפשרי, כאשר $4y^2-n$ הוא מסמר אי-זוגי, או כאשר הוא מתחלק ב-4. זה לא אפשרי אך ורק כאשר $4y^2-n=2\pmod 4$. אם לפחות עבור y אחד מתקיים $4y^2-n\neq 2\pmod 4$, אז זה מתקיים לכל y, ולכן לכל y יש פתרון למשוואה.

3. מצאו את כל הרביעיות של מספרים שלמים a,b,c,d עבורן מתקיים:
$$a^3+2b^3=7c^3+14d^3.$$

תשובה. $a=b=c=d=0$.

פתרון. נתבונן במשוואה $\bmod 7$. ניזכר כי $x^3=\pm 1\pmod 7$ כאשר $x\neq 0\pmod 7$ ניתן לראות את זה או לאחר בדיקת מקרים, או ממשפט פרמה: הרי
$$\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)=x^6-1=0\pmod 7.$$
לכן $a^3+2b^3=0\pmod 7$, וזה לא מתאפשר כאשר $a,b\neq 0\pmod 7$, הרי אז $\pm 1\pm 2=0\pmod 7$, וזה לא יתכן. לכן a או b מתחלק ב-7, לכן a ו-b מתחלקים ב-7, ולכן ניתן לרשום $a=7\alpha$, $b=7\beta$, כאשר גם $\alpha,\beta=7$.

למשוואה הנתונה יש פתרון טריביאלי $a=b=c=d=0$. נניח שיש גם פתרון נוסף. אז ניתן לחלק את a,b,c,d במחלק המשותף הגדול ביותר של כולם, ולעבור לפתרון שבו אין מחלק משותף. בכל מקרה ראינו שאז $7^3\left(\alpha^3+2\beta^3\right)=7c^3+14d^3$, במילים אחרות $7^2\left(\alpha^3+2\beta^3\right)=c^3+2d^3$. כבר הוכחנו שבמקרה זה c ו-d מתחלקים ב-7. ובכן, ל-a,b,c,d יש מחלק משותף שהוא 7, אבל הנחנו שיש לנו פתרון ללא מחלק משותף. מש"ל.

4. מצאו את כל השלשות של שלמים חיוביים x,y,z שמקיימים
$$\left(x+y\right)\left(1+xy\right)=2^z.$$

תשובה. $\{x,y\}$ הוא $\left\{1,2^k-1\right\}$ או $\left\{2^k-1,2^k+1\right\}$
(ואז $z=4^k$ או $z=2\cdot 8^k$ בהתאמה.)

פתרון. כל מחלק של חזקת 2 הוא חזקת 2, לכן ניתן לרשום
$$x+y=2^{k+1}$$
$$1+xy=2^m$$
כאשר k,m מספרים שלמים.
$$\left(x-1\right)\left(y-1\right)=1+xy-\left(x+y\right)=2^m-2^{k+1}$$
זה מספר אי-שלילי, לכן הוא מתחלק ב-2^{k+1}. כמו כן
$$\left(x+1\right)\left(y+1\right)=1+xy+\left(x+y\right)=2^m+2^{k+1}$$
לכן גם מספר זה מתחלק ב-2^{k+1}.
נשים לב כי $\left(x-1,x+1\right)=\left(x-1,2\right)\leq 2$. כמו כן $\left(y-1,y+1\right)\leq 2$. לכן מתקיים אם גם $x-1$ וגם $y-1$ מתחלקים ב-4, אז $x+1$ ו-$y+1$ מתחלקים ב-2 אבל לא ב-4, ולכן $k\leq 1$.
אם $k\leq 1$ אז $x+y=2$ או $x+y=4$. במקרה ראשון $x=y=1$, ובמקרה שני $\{x,y\}=\{1,3\}$, הרי $x=y=2$ לא מקיים $1+xy=2^m$.

מרגע זה נניח כי $k\geq 2$. אז מבין $x-1,y-1$ רק אחד יכול להתחלק ב-4. נניח לה"כ כי זה $y-1$. אז $y-1$ מתחלק ב-2^k. אבל $x+y=2^{k+1}$, לכן $y-1$ שמתחלק ב-2^k יכול להיות רק 0 או 2^k, אחרת x או y שלילי. לכן $y=1$ או $y=2^k+1$, במקרים אלה $x=2^{k+1}-1$ או $x=2^k-1$ בהתאמה. בדיקה פשוטה מראה שנוסחאות אלה עובדות, וכוללת גם את המקרה הקודם שמצאנו עבור $k=1$.

5. מצאו את כל הזוגות m,n של מספרים טבעיים, עבורם $m^2+2\cdot 3^n=m\cdot 2^{n+1}-m$.

תשובות. יש 4 אפשרויות: $(54,5)$, $(9,5)$, $(9,3)$, $(6,3)$.

פתרון. המשוואה הנתונה היא משוואה ריבועית ב-m. אנחנו נוכיח, שאן פתרון עבור n גדול מספיק. קל לראות כי $2\cdot 3^n=m\cdot 2^{n+1}-m-m^2$ מתחלק ב-m.

לכן m הוא שווה ל-3^s או ל-$2\cdot 3^s$, כאשר $0\leq s\leq n$.

במקרה הראשון מקבלים $3^{2s}+2\cdot 3^n=3^s\cdot 2^{n+1}-3^s$, כלומר $3^s+2\cdot 3^{n-s}=2^{n+1}-1$.

במקרה השני נקבל $4\cdot 3^{2s}+2\cdot 3^n=3^s\cdot 2^{n+2}-2\cdot 3^s$, כלומר $2\cdot 3^s+3^{n-s}=2^{n+1}-1$,

כלומר בכל מקרה מקבלים משוואה מהסוג $3^a+2\cdot 3^b=2^{n+1}-1$, כאשר $a+b=n$.

נשים לב שאם $m=\max(a,b)\geq \frac{2}{3}(n+1)$ אז $3^m\geq 3^{\frac{2}{3}(n+1)}=9^{\frac{n+1}{3}}>8^{\frac{n+1}{3}}=2^{n+1}$.

לכן $m<\frac{2}{3}(n+1)$, כלומר $a,b\leq m\leq \frac{2}{3}n+\frac{1}{3}$, ולכן $a,b\geq \frac{1}{3}(n-1)$.

לכן במשוואה $3^a+2\cdot 3^b=2^{n+1}-1$ האגף השמאלי מתחלק ב-$3^{\left\lceil\frac{n-1}{3}\right\rceil}$, ולכן כך גם האגף הימני.

טענה. 2^N-1 מתחלק ב-3^M אך ורק כאשר N מתחלק ב-$2\cdot 3^{M-1}$.

טענה זו היא מקרה פרטי של הרמת אקספוננת. עבור מי שלא מכיר את המשפט הכללי: מומלץ להוכיח את הטענה כתרגיל, באינדוקציה על M, תוך שימוש בנוסחאות כפל מקוצר.

ובכן, מהטענה נובע כי $n+1\leq 2\cdot 3^{\frac{n-1}{3}-1}\leq 2\cdot 3^{\left\lceil\frac{n-1}{3}\right\rceil-1}$, כלומר

$$8\cdot 3^{n-4}\leq (n+1)^3.$$

עבור $n=8$ זה לא מתקיים, הרי $8\cdot 3^{n-4}=8\cdot 3^5>3^6=9^3=(n+1)^3$. עבור n גדול יותר זה גם לא מתקיים, הרי כל פעם כאשר עוברים מ-$n-1$ ל-n האגף השמאלי גודל פי 3, והאגף הימני גודל פי

$$\frac{(n+1)^3}{n^3}=1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\leq 1+\frac{3}{8}+\frac{3}{8^2}+\frac{1}{8^3}<1+\frac{3}{8}+\frac{4}{8^2}<1+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1+\frac{1}{2}$$

כלומר פחות מאשר פי $1\frac{1}{2}$, כל עוד $n\geq 8$. לכן אי-שוויון שקיבלנו אינו נכון לכל $n\geq 8$.

בעצם, גם $n=7$ לא מתאים, הרי אז צריך ש-2^8-1 יתחלק ב-$3^{\left\lceil\frac{n-1}{3}\right\rceil}=3^2$ והוא לא.

גם $n=6$ לא מתאים, הרי אז צריך ש-2^7-1 יתחלק ב-$3^{\left\lceil\frac{n-1}{3}\right\rceil}=3^2$ והוא לא.

לכן נשאר לנו לבדוק האם יש פתרון למשוואה ריבועית ב-m, כאשר $n\le 5$:
$$m^2+m\left(1-2^{n+1}\right)+2\cdot 3^n=0.$$
אם יש m שלם אחד, אז גם השני שלם, הרי הסכום שלם. בנוסף, אם פתרון אחד חיובי, אז גם השני, הרי המכפלה חיובית. דיסקרימיננטה $b^2-4ac=\left(1-2^{n+1}\right)^2-8\cdot 3^n$ צריכה להיות ריבוע שלם.

n	**דיסקרימיננטה**
0	$1-8=-7$
1	$3^2-8\cdot 3=-15$
2	$7^2-8\cdot 9=-23$
3	$15^2-8\cdot 27=9\left(25-8\cdot 3\right)=9=3^2$
4	$31^2-8\cdot 81=961-648=313$
5	$63^2-8\cdot 3^5=9^2\left(7^2-8\cdot 3\right)=9^2\cdot 5^2=45^2$

זה קורה רק פעמיים:
$n=3$ או $n=5$.
השורשים הם $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2}$.
עבור $n=3$ נקבל:
$m=\frac{15\pm 3}{2}=6,9$.
עבור $n=5$ נקבל:
$m=\frac{63\pm 45}{2}=9,54$.

6. נניח כי a,b,c הם מספרים שלמים חיוביים. הוכיחו כי $(ab+1)(ac+1)(bc+1)$ הוא ריבוע שלם אם ורק אם $ca+1$, $bc+1$, $ab+1$ כולם ריבועים שלמים.

הערה. זו שאלה של Kiran S. Kedlaya.
פתרון. נתחיל מהגדרה:
הגדרה. קבוצה של מספרים היא P_t-קבוצה עם מכפלה של כל שני מספרים זה ריבוע שלם פחות t.

למשל, $\{a,b,c\}$ היא P_1-קבוצה, אם $ca+1$, $bc+1$, $ab+1$ כולם ריבועים שלמים. מציאת דוגמאות של P_t-קבוצות של 4 מספרים או יותר דורשת קשיחות. דוגמה אחת קלאסית של P_{256}-קבוצה שדיופנטוס מצא היא $\{1,33,68,105\}$. דוגמה של P_1-קבוצה שמצא פרמה היא $\{1,3,8,120\}$.

אויילר מצא משפחה אינסופית של דוגמאות, שמכידה את הדוגמה של פרמה. נסביר את הבנייה של אויילר, כי זה יעזור לנו לפתור את השאלה.

טענה. אם $\{p,q,r\}$ זו P_1-קבוצה, אז אפשר להרחיב אותה ל-P_1-קבוצה $\{p,q,r,s\}$, כאשר
$$(1)\quad s=p+q+r+2pqr\pm 2\sqrt{(pq+1)(pr+1)(qr+1)}$$
(כל עוד s חיובי; קל לראות ש-s בהכרח שלם).

הוכחה. בעצם, s הוא שורש של משוואה ריבועית

$$p^2+q^2+r^2+s^2-2(pq+pr+qr+ps+qs+rs)-4pqrs-4=0 \quad (2).$$

את זה לא קשה לבדוק, ואתם מוזמנים לעשות את זה (אין סיבה להיות שמנים, ואם יש אז סיבה זו לא נכונה). אבל את המשוואה הזו ניתן לרשום במספר דרכים שקולות:

$$(p+q-r-s)^2=4(pq+1)(rs+1), \quad (3),$$

$$(p-q+r-s)^2=4(pr+1)(qs+1), \quad (4),$$

$$(p-q-r+s)^2=4(qr+1)(ps+1). \quad (5)$$

מכאן רואים שאם כבר יודעים, ש-$pq+1$, $pr+1$, $qr+1$ הם ריבועים שלמים, אז גם $ps+1$, $qs+1$, $rs+1$ ריבועים שלמים. בזה הוכחנו את הטענה.

נעבור לפתרון השאלה. נניח בשלילה שקיימים $0<p\le q\le r$ שלמים, עבורם $(pq+1)(pr+1)(qr+1)$ הוא ריבוע שלם, אבל $pq+1$, $pr+1$, $qr+1$ לא כולם ריבועים שלמים. נבחר שלישיה כזאת, עבורה $p+q+r$ קטן ככל האפשר.

נגדיר s באמצעות נוסחה $(*)$ בהוכחת הטענה, כאשר הסימן ליד השורש יהיה $-$.

נקבל עדיין s שלם. אנו נוכיח, כי $0<s<r$, ואז השלישייה p,q,s היא מקיימת את כל התנאים: $pq+1$, $ps+1$, $qs+1$ לא כולם ריבועים (עקב הזהויות (4) ו-(5)), ובנוסף גם $(pq+1)(ps+1)(qs+1)$ ריבוע שלם, הרי למשוואה (1) כאשר חושבים עליה כמשוואה ריבועית ב-r יש שורשים שלמים, ואז דיסקרימיננטה שלה היא ריבוע שלם; אבל $p+q+s<p+q+r$ בסתירה למינימליות השלישייה (p,q,r).

ובכן, נשאר להראות כי $0<s<r$.

לפי (3), מתקיים $(pq+1)(rs+1)=x^2$. הגורם $pq+1$ חיובי, לכן גם הגורם השני $rs+1$ אינו שלילי, לכן $s\ge-\frac{1}{r}$. אם $r=1$ מקבלים גם $p=q=1$ הרי $0<p\le q\le r$ וזה לא יתכן. לכן $r>1$, ולכן כבר הוכחנו כי $s>-1$. אם $s=0$ אז לפי (3)

$$(p+q-r)^2=4(pq+1)$$

האופן דומה מ-(4) ו-(5) נסיק

$$(p-q+r)^2=4(pr+1) \ , \ (p-q-r)^2=4(qr+1)$$

ואז רואים כי $pq+1$, $pr+1$, $qr+1$ כולם ריבועים שלמים, בניגוד להנחה.

ובכן, גם $s=0$ לא יתכן, כלומר $s>0$.

נשאר להראות ש-$s<r$. נסמן ב-s_2 את השורש האחר של המשוואה, שמתקבל כאשר ב-(2) מציבים פלוס ולא מינוס. די ברור מהגדרה כי $s_2>r$. אז לפי משפט וייטא,

$$s\cdot s_2=p^2+q^2+r^2-2pq-2pr-2qr-4=$$
$$=r^2-p(2r-p)-q(2r-q)-2pq-4<r^2$$

לכן $s<\frac{r^2}{s_2}<r$, מש"ל.