תרגיל 14

1. א. מספר טבעי נקרא משונה, אם ברישום העשרוני שלו יש רצף של ספרות (לפחות של ספרה אחת, אבל יכול להיות גם יותר ארוך, אפילו כל המספר כולו), שמכפלת הספרות ברצף זה היא ריבוע שלם. למשל, אם ספרה 4 או 9 מופיעה במספר, אז הוא בהכרח משונה. כמה ספרות יכולות להיות במספר שאינו משונה?
ב. מספר נקרא קובייתי, אם יש בו רצף של ספרות, שמכפלתם היא חזקה שלישית של מספר שלם (למשל עם במספר מופיעה הספרה 8, אז הוא בהכרח קובייתי). כמה ספרות יכולות להיות במספר שאינו קובייתי?

תשובות. א. לא יותר מ-15. ב. לא יותר מ-80.
פתרון. א. במספר n-ספרתי יש $n+1$ נקודות בהם אפשר לחתוך אותו: רווחים בין הספרות, התחלה וסוף. לכל נקודה כזאת נחשב את המכפלה של כל המספרים מהתחלה ועד אליה (עבור התחלה נגיש שהמכפלה היא 1). המטרה שלנו היא למצוא שתי נקודות הפרדה, כך שיחס המכפלות המוגדרות לנקודות אלו הוא ריבוע שלם. פיתוח של שתי המכפלות למכפלה של גורמים ראשוניים שהוא מהצורה $2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d$, הרי אין ספרות עם מחלקים ראשוניים גדולים יותר. המספר משונה אם בשתי מכפלות שונות צריך שגם 2, גם 3, גם 5 וגם 7 מופיעות בחזקות עם אותה זוגיות. סה"כ יש $2^4=16$ אפשרויות לזוגיות של החזקה לגבי כל הגורמים הראשוניים. לכן עבור מספר שיש לו 16 ספרות או יותר יש לפחות 17 נקודות הפרדה, שלפי שובך היונים לשתי נקודות יש למכפלות שהגדרנו אותה זוגיות מבחינת כל גורם ראשוני. מכפלת ספרות הרצף בין שתי הנקודות הוא ריבוע שלם.
ובכן, כל מספר שיש לו לפחות 16 ספרות משונה. נדגים מספר של 15 ספרות שאינו משונה:

.232523272325232

אכן, אם יש רצף שהמכפלה בו ריבוע, אסור שיכיל את 7, הרי 7 מופיע רק פעם אחד. לכן רצף כזה יכול להכיל 5 רק פעם אחד, ולכן אסור שיכיל את 5. כלומר זה תת-רצף בתוך הרצף 232. לכן אסור שיכיל את 3, ואז זה בהכרח 2, אבל זה גם לא ריבוע.
כמובן, במספר שאינו משונה יכולה להיות גם כל כמות ספרות שקטנה מ-15: אפשר לקחת כל רצף התחלתי בדוגמא שהראנו.

ב. הוכחה של הטענה שאין מספר לא קובייתי באורך 64 היא זהה כמעט לגמרי לחצי הראשון בפתרון של סעיף א', רק שצריך בפירוק לגורמים $2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d$ להסתכל לא על ההזוגיות של החזקות a,b,c,d אלה על שארית החלוקה שלהם ב-3. עבור שאריות חלוקה ב-3 יש $3^4=81$ אפשרויות, ולכן כל מספר שיש לו 81 ספרות או יותר בהרח קובייתי. לא נחזור על ההוכחה. דוגמה למספר שאינו קובייתי באורך 80 היא

22322322522322322252232232272232232252232232252232232272232232252232232252232232

כל רצף יכול להכיל את 7 לא יותר מפעמיים, לכן אם מכפלת הספרות היא חזקה שלישית אז אין בו 7, ולכן גם יש 5 לא יותר מאשר פעמיים, ולכן אין את 5, ולכן יש 3 לא יותר מאשר פעמיים, ולכן אין את 3, ולכן יש 2 לא יותר מפעמיים, ולכן אין רצף.
כמובן, קל ליצור ממספר זה מספרים קצרים יותר שהם לא קובייתיים.

2. בפרלמנט של מדינה זרה יש 120 חברים. כל אחד שייך לאחד מבין A מפלגות, ואין לו אויבים בתוך המפלגה. בנוסף, כל אחד השתתף באחת מבין B ישיבות, שבכל ישיבה כזאת כל שניים מבין המשתתפים היו אויבים. הוכיחו כי $A+B\geq 22$.

פתרון. ניצור טבלה $A\times B$: לכל מפלגה נקצה שורה, ולכל ישיבה עמודה. נרשום כל חבר פרלמנט במשבצת של הטבלה, בהתאם למפלגתו וישיבה שהו השתתף בא. כל אחד אויב של כל האנשים שרשומים בעמודה שלו, אבל לא של אנשים שנמצאים בשורה שלו. לכן כל אחד לבד במשבצת שלו. לכן כמות החברים קטנה או שווה לכמות המשבצות, כלומר $A\cdot B\leq 120$. אם נסמן $d=\frac{A-B}{2}$, $m=\frac{A+B}{2}$ אז $A=m+d$, $B=m-d$,
לכן $A\cdot B=(m+d)(m-d)=m^2-d^2\leq m^2\leq 120$.

נשים לב כי $10.5^2=100+10+0.25=110.25<120$, לכן לא יתכן ש-$m\leq 10.5$.
אבל m חצי-שלם או שלם, לכן $m\geq 11$. לכן $A+B=2m\geq 22$.
לא קשה לבנות דוגמה, שבה $A+B=22$. ניתן לבנות טבלה 11×11 או 10×12, להקצות לכל חבר משבצת נפרדת, ולאחד אותם למפלגות\לשלוח לישיבות לפי שורות\עמודות של הטבלה.

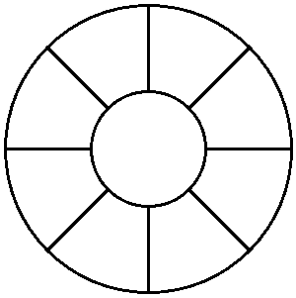
3. ביום בהיר אחד שבע חברים הלכו לחוף הים. נתון, שכל אחד נכנס למים 3 פעמים, ושלכל שניים היה רגע שהם היו במים בו-זמנית. הוכיחו, שהיה רגע בו שלושה אנשים היו במים.

פתרון. נקרא לחברים A, B, C, D, E, F, G. לכל פעם שמישהו נכנס למים ניתן שם שמורכב משם האיש ומספר הכניסה של אותו האיש למים: למשל C2 זה הפעם השנייה ש-C נכנס למים. נצייר גרף, שקודקודיו הם הכניסות של אנשים למים: כמו A1, A2, ... , G3, בסה"כ לכל היותר 21 כניסות. כל פעם שיש שני אנשים במים בו-זמנית, נחבר קודקודים מתאימים של הגרף באמצעות קשת. ליד כל קשת נרשום את הרגע שבו הקשת הופיע.
קל לראות שהגרף שציירנו הוא גרף פשוט ללא מעגלים. אכן, נניח שיש בגרף מעגל:

$$X_1 \xrightarrow[v_1]{} X_2 \xrightarrow[v_2]{} X_3 \xrightarrow[v_3]{} \ldots \xrightarrow[v_{n-1}]{} X_n \xrightarrow[v_n]{} X_1$$

(כאשר X_i קודקודים, v_i קשת). אם הקשת v_1 הופיע לאחר v_2, זאת אומרת ש-X_3 נכנס לים אחרי X_1, כי לא יתכן שבו-זמנית X_1, X_2, X_3 בים. לכן כאשר X_3 נכנס לים אז X_2 כבר היה שם. לכן כאשר עוברים מ-X_3 ל-X_4 אז זה כבר אחרי ש-X_4 כבר יצא. לכן v_3 הופיע אחרי v_2. ממשיכים בצורה כזאת, כל פעם נגיע לקשת יותר מאוחרת, ולכן לא נחזור למצב המקורי.
כמובן, אם יש לכל היותר 21 קודקודים בגרף שלא מכיל מעגלים, אז יש לכל היותר 20 קשתות. לכל קשת לכל היותר שתי קצוות. אם מישהו פגש בתוך הים את כל החברים האחרים, אז הכניסות שלו למים מקושרות בגרף ל-6 קשתות לפחות. לכן אם כל אחד פגש כל אחד, צריכים שבחשבון הכולל של קשתות בגרף שלנו יצא לפחות $6\cdot 7=42$, אבל יש שם לכל היותר $2\cdot 20=40$.

4. בעיגול שקוטרו 5 סומנו 10 נקודות. הוכיחו, שיש שתי נקודות מסומנות שהמרחק בינם אינו עולה על 2.



פתרון. נסמן את מרכז העיגול ב-O.
את העיגול נחלק ל-9 חלקים: חלק אחד הוא מעגל שמרכזו O ורדיוסו 1. את הטבעת שבין המעגלים נחלק ל-8 חלקים שווים על ידי קטעים, שהמשכיהם עוברים דרך O. אנו טוענים, שמרחק בין כל שתי נקודות שנמצאים באותו חלק של העיגול נמצאות במרחק 2 לכל היותר זו מזו.
עבור החלק המרכזי זה ברור עם A ו-B נמצאות במרחק 1 לכל היותר מ-O, אז לפי אי-שוויון המשולש $AB \le OA + OB \le 1+1 = 2$. כעת ניקח שתי נקודות A, B באותו מגזר. כלומר $1 \le OA \le 2.5,\ 1 \le OB \le 2.5$ ובנוסף $\sphericalangle AOB \le 45^\circ$. בהינתן AO, BO כלשהם הקטע AB גודל ככל ש-$\sphericalangle AOB$ גודל (כל עוד שלא מגיעים ל-180°). לכן מספיק לבדוק את המקרה ש-$\sphericalangle AOB = 45^\circ$. בהינתן נקודה A קבועה ונקודה B על קטע של רדיוס, האורך AB יהיה גדול ביותר כאשר נזיז את B לאחד הקצוות. כלומר מספיק לבדוק מקרים ש-OB הוא 1 או 2.5. אותו דבר אפשר להגיד לגבי OA.
ובכן, יש 3 משולשים שצריך לבדוק: לכולם יש זווית של 45°, וליד הזווית יכולים להיות צלעות 1 ו-1, או 1 ו-2.5, או 2.5 ו-2.5. כמובן במקרה הראשון ניתן לדלג, כי הוא פי 2.5 קטן מהמקרה השלישי. נחשב את AB בשני המקרים האחרים לפי משפט קוסינוסים:

$$AB^2 = 2.5^2 + 1^2 - \sqrt{2} \cdot 2.5 \quad \text{או} \quad 2 \cdot 2.5^2 - \sqrt{2} \cdot 2.5^2$$

אנו רוצים להראות שבכל מקרה $AB \le 2$ כלומר $AB^2 \le 4$ כלומר

$$2.5^2 + 1^2 - \sqrt{2} \cdot 2.5 \le 4 \quad \text{וגם} \quad 2 \cdot 2.5^2 - \sqrt{2} \cdot 2.5^2 \le 4$$

$$4 + 2 + \tfrac{1}{4} + 1 - 4 \le \sqrt{2} \cdot 2.5 \quad \text{וגם} \quad 2 \cdot 2.5^2 - 4 \le \sqrt{2} \cdot 2.5^2$$

$$\tfrac{2}{5} \cdot 3\tfrac{1}{4} \le \sqrt{2} \quad \text{וגם} \quad 2 - 4 \cdot \tfrac{4}{25} \le \sqrt{2}$$

$$\frac{2 \cdot 13}{20} \le \sqrt{2} \quad \text{וגם} \quad \frac{34}{25} \le \sqrt{2}$$

$$\frac{2 \cdot 13^2}{400} \le 1 \quad \text{וגם} \quad \frac{2 \cdot 17^2}{25^2} \le 1$$

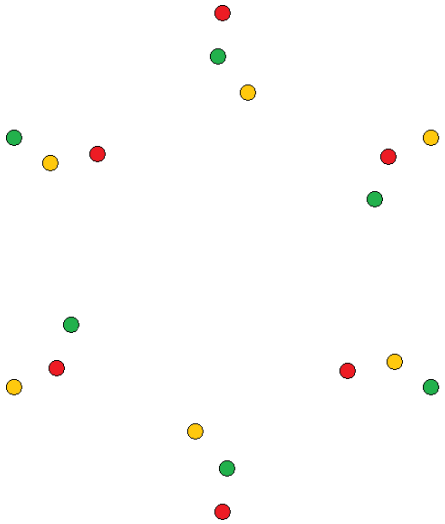
$$169 \le 200 \quad \text{וגם} \quad 2 \cdot 289 \le 625$$

ובכן כאשר מסומנות 10 נקודות באחד מ-9 חלקים יהיו שתי נקודות, המרחק בין שתי הנקודות אינו עולה על 2.

הערה. גם אם מסומנות רק 9 נקודות, ניתן להראות שיש שתי נקודות מסומנות שהמרחק בינם 2 לכל היותר. אם בכל חלק יש נקודה אחת לכל היותר, בחלק המרכזי יש רק נקודה אחת. אז אפשר לסובב את הטבעת שציירנו, כך שאחת הנקודות תהיה על קו ההפרדה.
אז כבר נקבל שיש חלק שמכיל 2 נקודות, הרי יש נקודה שמוכלת בשני חלקים בו-זמנית.

5. במישור מסומנות N נקודות, כאשר אף שלוש נקודות לא על ישר אחד. כל נקודה היא באחד מבין 3 צבעים: ירוקה, צהובה או אדומה. מהוא הערך המקסימלי האפשרי של N, בהינתן שכל משולש שקודקודיו ירוקים מכיל נקודה צהובה, כל משולש שקודקודיו צהובים מכיל נקודה אדומה, וכל משולש שקודקודיו אדומים מכיל נקודה ירוקה?

פתרון. ניקח קבוצה של K נקודות ירוקות. נניח שהקמור שלהם מורכב מ-C נקודות ירוקות. ל-$I=K-C$ נקודות ירוקות אחרות נקרה נקודות פנימיות. את מצולע הקמור של C נקודות אחרות ניתן לחלק ל-$C-2$ משולשים (כאשר $C=3$, יש משולש אחד, כאשר מגדילים את C ב-1, מוסיפים עוד משולש). כל פעם שמוסיפים נקודה פנימית, ניתן לחבר אותה ל-3 הקודקודים של המשולש שמכיל אותה, ולהגדיל את כמות המשולשים ב-2 (הרי משולש אחד מוחלף ב-3). כך נקבל חלוקה למשולשים של הקמור, כך שלכל המשולשים כל הקודקודים ירוקים, ובסה"כ יש $C-2+2I=K+I-2$, ובכל משולש יש נקודה צהובה נפרדת.
לכן כמות הנקודות הצהובות בתוך הקמור של K נקודות ירוקות, ש-I מהם הם לא קודקודי הקמור היא $L\geq K+I-2$. באופן דומה מוכיחים, כמות הנקודות האדומות בתוך הקמור של L הנקודות הצהובות האלו היא M, כאשר $M\geq L-2$. כמו כן, באופן דומה מוכיחים שכמות הנקודות הירוקות בתוך הקמור של M הנקודות האדומות היא J, כש-$J\geq M-2$.
מצד שני $J\leq I$, הרי נקודות אדומות האלה בתוך הקמור של הנקודות האדומות שהתחלנו מהם. ובכן: $0\geq K-6$, זאת אומרת $I\geq J\geq M-2\geq L-4\geq K+I-6$.
כלומר $K\geq 6$, כלומר לא יכול להיות מעל 6 נקודות ירוקות. באופן דומה גם לא יכול מעל 6 נקודות צהובות ומעל 6 נקודות אדומות. ובכן, יש לכל היותר 18 נקודות.



נבנה דוגמה עם 6 נקודות בכל צבע (כמובן, מזה קל למצוא דוגמה עם כמות קטנה יותר של נקודות, כאשר פשוט נוריד קודקודי קמור כלשהם אחד-אחד). הדוגמה בציור
סיבוב ב-60° של התמונה מעביר נקודות ירוקות לצהובות, צהובות לאדומות, ואדומות לירוקות. לכן אם נבדק שכל משולש עם קודקודים ירוקים מכיל נקודה צהובה, אז שני התנאים האחרים גם מתקיימים.
יש $\binom{6}{3}=20$ משולשים בעלי נקודות ירוקות, אבל לתמונה שלנו יש גם סימטריה ביחס לסיבוב ב-180°, לכן בעצם יש רק 10 אפשרויות שונות מהותית. נסמן את הקודקודים הירוקים נגד כיוון השעון A, B, C, D, E, F כאשר A ו-D הם קודקודים של הקמור של כל 18 הנקודות.
אם לוקחים את A, D ועוד נקודה ירוקה, אז קל לראות שהמשולש יכיל את הנקודה הצהובה הקרובה ל-A או ל-D, תלוי מאיזה צד של AD לוקחים את הנקודה הירוקה הנוספת.
אם לא לוקחים לא את A ולא את D, אז בעצם חותכים חצי לפי אלכסון מהמקבילית BCEF. בתוך מקבילית זה שתי נקודות צהובות, שסימטריות ביחס למרכז המקבילית אבל לא נמצאות על האלכסונים, לכן כל אלכסון מחלק את BCEF לשני משולשים, שתוך כל אחד מהם יש נקודה צהובה.

נשאר לבדוק מקרים שבהם לוקחים אחת מהנקודות A או D. ניתן להניח שבצעם לוקחים את A, התמונה סימטרית. אם בנוסף לוקחים מצד אחד B או C ומצד שני E או F, אז הנקודה הצהובה הקרובה ל-A נמצאת במשולש. אם לוקחים A, B ו-C אז הנקודה הצהובה הקרובה ל-C בתוך המשולש, ואם לוקחים AFE אז הנקודה הצהובה הקרובה ל-F נמצאת בתוך המשולש. זה מסיים את בדיקת המקרים.

6. חרגול קופץ על הציר הממשי. הוא מתחיל בנקודה 0, והוא רוצה לבצע 2009 קפיצות באורכים 1, 2, 3, ..., 2009, כאשר הוא משתמש בקפיצה אחת בדיוק מכל אורך אבל לאו דווקא בסדר זה. עכביש מסמן 2008 מספרים שלמים חיוביים שקטנים מ-$2009\cdot 1005$. הראו שהחרגול יכול לעשות את הקפיצות שלו ולהגיע ל-$2009\cdot 1005$ אבל לא לדרוך על אף מספר שסומן על ידי העכביש.

פתרון. אנחנו נוכיח טענה יותר כללית באמצעות אינדוקציה על n: אם נתונים מספרים טבעיים $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ ויש פחות מ-n מכשולים בדרך, אז החרגול יכול להגיע מ-0 לנקודה $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ כאשר הוא עושה קפיצה אחד בכל אחד מהאורכים $a_1, \ldots, a_n$ בסדר מסוים לפי בחירתו, בלי לדרוך על מכשולים. תהיה $M = \{m_1, \ldots, m_{n-1}\}$ קבוצת המכשולים (שהם מספרים בין 1 ל-$A-1$). בסיס האינדוקציה ברור: אם יש רק קפיצה אחת, ו-0 מכשולים, החרגול לא צריך להיות חכם במיוחד.
נניח כי $m = \min M$, כלומר המכשול השמאלי ביותר.
אם $m \geq a_n$, אנחנו יכולים באמצעות הנחת אינדוקציה לבנות שרשרת קפיצות הפוכה, מ-A קלפי מעטה, שמורכבת מהקפיצות שמאלה באורך $a_1, \ldots, a_{n-1}$ שמסתיימת ה-a_n (ניתן להמשיך שרשרת כזאת עם קפיצה באורך a_n שחוזרת ל-0). הכיוון לא משנה, תמיד נוכל להפוך את השרשרת בסוף.
לפי הנחת האינדוקציה, ניתן להניח שהשרשרת לא דורכת על $M \setminus \{m\}$ (כל המכשולים פרט ל-m). השרשת יכולה לדלג גם על m, אבל יכולה גם לנחות עליו: לאחר קפיצה באורך a_k כאשר $k < n$ השרשרת עלולה להגיע ל-m. במקרה זה, נחליף את הקפיצה של a_k בקפיצה יותר ערוכה באורך a_n. אז אנחנו נדלק על m ונחת שמאלית אליו, ששם כבר אין מכשולים אחרים, ונוכל לעשות את הקפיצות שנותרו בכל סדר שנרצה.

כעת נחשוב על המקרה השני: $m < a_n$. כלומר אם חרגול יתחיל מ-0 בקפיצה באורך a_n אז הוא ידלג על מכשול אחד לפחות. לכן אם החרגול לא ינחת בקפיצה כזאת ב-a_n, אז הוא יוכל להגיע לסוף המסלול לפי הנחת האינדוקציה (הרי על מכשול אחד הוא דילג, לכן נשארו לפניו פחות מ-$n-1$ מכשולים).
אבל יתכן כי a_n הוא מכשול. אז אפשר לנסות התחלות אחרות: קודם a_1 ואז a_n, או קודם a_2 ואז a_n, ..., או קודם a_{n-1} ואז a_n. מבין n התחלות אפשריות למסלול שתיארנו (כולל האפשרות של a_n בתור קפיצה ראשונה) לפחות אחת לא נוחתת על מכשולים: הרי כל ההתחלות האלה משתמשות במשבצות שונות, ויש $n-1$ מכשולים, לכן לפחות התחלה אחת אינה משביכה מכשול. נניח שזו התחלה a_k ואז a_n. בסוף שני המהלכים אנו מגיעים למספר $a_n + a_k$, ומשמאלו יש לפחות שני מכשולים: אחד ב-a_n והשני ב-m. לכן נשארו לפני החרגול שני מכשולים פחות, ולכן ניתן להשלים את המסלול עם התחלה זו לפי הנחת האינדוקציה.