תרגיל 14

1. א. מספר טבעי נקרא משונה, אם ברישום העשרוני שלו יש רצף של ספרות (לפחות של ספרה אחת, אבל יכול להיות גם יותר ארוך, אפילו כל המספר כולו), שמכפלת הספרות ברצף זה היא ריבוע שלם. למשל, אם ספרה 4 או 9 מופיעה במספר, אז הוא בהכרח משונה. כמה ספרות יכולות להיות במספר שאינו משונה?
ב. מספר נקרא קובייתי, אם יש בו רצף של ספרות, שמכפלתם היא חזקה שלישית של מספר שלם (למשל עם במספר מופיעה הספרה 8, אז הוא בהכרח קובייתי). כמה ספרות יכולות להיות במספר שאינו קובייתי?

2. בפרלמנט של מדינה זרה יש 120 חברים. כל אחד שייך לאחד מבין A מפלגות, ואין לו אויבים בתוך המפלגה. בנוסף, כל אחד השתתף באחת מבין B ישיבות, שבכל ישיבה כזאת כל שניים מבין המשתתפים היו אויבים. הוכיחו כי $A+B\geq 22$.

3. ביום בהיר אחד שבע חברים הלכו לחוף הים. נתון, שכל אחד נכנס למים 3 פעמים, ושלכל שניים היה רגע שהם היו במים בו-זמנית. הוכיחו, שהיה רגע בו שלושה אנשים היו במים.

4. בעיגול שקוטרו 5 סומנו 10 נקודות. הוכיחו, שיש שתי נקודות מסומנות שהמרחק בינם אינו עולה על 2.

5. במישור מסומנות N נקודות, כאשר אף שלוש נקודות לא על ישר אחד. כל נקודה היא באחד מבין 3 צבעים: ירוקה, צהובה או אדומה. מהוא הערך המינימלי האפשרי של N, בהינתן שכל משולש שקודקודיו ירוקים מכיל נקודה צהובה, כל משולש שקודקודיו צהובים מכיל נקודה אדומה, וכל משולש שקודקודיו אדומים מכיל נקודה ירוקה?

6. חרגול קופץ על הציר הממשי. הוא מתחיל בנקודה 0, והוא רוצה לבצע 2009 קפיצות באורכים 1, 2, 3, ..., 2009, כאשר הוא משתמש בקפיצה אחת בדיוק מכל אורך אבל לאו דווקא בסדר זה. עכביש מסמן 2008 מספרים שלמים חיוביים שקטנים מ-$2009\cdot 1005$. הראו שהחרגול יכול לעשות את הקפיצות שלו ולהגיע ל-$2009\cdot 1005$ אבל לא לדרוך על אף מספר שסומן על ידי העכביש.