תרגיל 13

1. במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו I. אמצעי הצלעות של המשולש ABC הם A_1, B_1, C_1. הראו שהישר IA_1 מחלק את ההיקף של המשולש $A_1B_1C_1$ לשני חלקים שווי אורך.

פתרון. נתבונן במעגל החסום מבחוץ לצלע BC. נניח שהמעגל משיק לצלע BC בנקודה T, ולהמשכי הצלעות AB ו-AC בנקודות Q ו-P בהתאמה. אז
$$AB + AC + BC = AB + AC + BT + TC = AB + AC + BP + QC = AP + AQ$$
אבל גם $AP = AQ$, לכן AP וגם AQ שווים לחצי היקף, שאותו נסמן p.
לכן AT חוצה את ההיקף של משולש ABC.

נסמן את אורכי הצלעות $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.
קל לראות כי $BT = BP = AP - c = p - c$, וכן $CT = p - b$.
באופן דומה, אם נסמן ב-S את נקודת ההשקה של המעגל החסום ב-ABC אם הצלע BC, לא קשה לחשב כי $BT = p - c$, $BS = p - b$ (גם כאן משתמשים מספר פעמים בכך, ששתי משיקים מאותה הנקודה למעגל הם באותו אורך). ובכן, S סימטרי ל-T ביחס לאמצע הצלע BC. במילים האחרות, אם M הוא אמצע BC אז הוא גם האמצע של TS.

ללא הגבלת הכלליות BC אופקי, ו-A נמצאת מעליו (ואם לא – נסובב את הציור). הומותטיה עם מרכז ב-A (ומקדם חיובי, אך קטן מ-1) מעבירה את המעגל החסום מבחוץ לצלע BC למעגל החסום של משולש ABC, ואת הנקודה הצפונית ביותר T של המעגל החסום מבחוץ לנקודה הצפונית ביותר N של המעגל החסום. אבל S היא הנקודה הדרומית ביותר של המעגל החסום, לכן SN הוא קוטב, לכן I הוא האמצע של SN.
לכן IA_1 הוא קטע אמצעי במשולש SNT, לכן הוא מקביל לישר ANT.

הומותטיה עם מקדם $-\frac{1}{2}$ ומרכז במפגש התיכונים תעביר את המשולש ABC למשולש $A_1B_1C_1$, ואת נקודה A ל-A_1. הישר AT שחוצה את ההיקף של ABC יעבור לישר שמקביל ל-AT, עובר דרך A_1 וחוצה את ההיקף של $A_1B_1C_1$. אבל הישר היחיד שמקביל ל-AT דרך A_1 הוא IA_1, ולכן IA_1 והוא חוצה את ההיקף של $A_1B_1C_1$.

הערה. מה שהוכחנו שקול למשפט על הישר של נאגל: הקטע שמחבר את מרכז המעגל החסום עם נקודת נאגל (שהיא נקודת מפגש של הקטעים שמחברים את הקודקודים לנקודות השקה של הצלעות הנגדיות עם המעגלים החסומים מבחוץ) עובר דרך נקודת מפגש התיכונים, שמחלק את הקטע ביחס 2:1. קל להוכיח את הטענה גם בקואורדינטות בריצנטריות.

2. במשולש ABC (שאינו שווה-שוקיים) מרכז המעגל החסום יסומן I, ומרכז המעגל החוסם יסומן O. הישרים IA, IB, IC חותכים את המעגל החוסם פעם נוספת בנקודות A', B', C' בהתאמה. עקבי האנכים מ-I לצלעות BC, AC, AB יסומנו A_1, B_1, C_1 בהתאמה. הראו כי הישרים IO, A_1A', B_1B', C_1C' נפגשים בנקודה אחת.

פתרון. נניח כי BC אופקי ו-A מעליו (ואם לא נסובב את הציור). הישר AI חוצה את הזווית BAC וגם את הקשת BC, לכן A' היא הנקודה הדרומית ביותר של הקשת BC. כמו כן, הנקודה A_1 היא הנקודה הדרומית ביותר של הקשת BC.

לכן הומותטיה חיובית שמעבירה את המעגל החסום למעגל החסום, תעביר את A' ל-A_1. מסיבות דומות היא תעביר את B' ל-B_1 ואת C' ל-C_1, וגם את I ל-O (הרי מרכז המעגל יעבור למרכז המעגל). לכן IO, A_1A', B_1B', C_1C' עוברים כולם במרכז ההומותטיה.

3. על צלעות AC ו-BC של משולש ABC נמצאות נקודות Q ו-P בהתאמה. נתון בנוסף, כי $AQ = AB = BP = 1$, וכי נקודת החיתוך של AP ו-BQ נמצאת על המעגל החסום של משולש ABC. מצאו את ההיקף של משולש ABC.

תשובה. 4.

פתרון. משולש שווה שוקיים ABP בסיס מאונך לחוצה זווית, לכן BI מאונך ל-AP. כמו כן, AI מאונך ל-BQ. לכן במשולש AIB הישרים AP, BQ הם הגבהים, ובנקודת החיתוך N של הישרים האלה עובר גם הגובה מ-I ל-AB. נתון אבל, ש-N נמצאת על המעגל החסום, ו-I הוא המרכז של המעגל החסום. לכן האנך מ-N על AB עובר דרך I, וגם דרך נקודת ההשקה S של המעגל החסום עם הצלע AB. ובכן, NS הוא קוטר של המעגל החסום.

נסמן ב-T את נקודת ההשקה של המעגל החסום עם BC. אז TS מאונך ל-BI, כמו גם הישר ANP. נסמן ב-K נקודה חיתוך נוספת (שהיא לא N) של המעגל החסום עם הישר ANP. אז ראינו כי $NK \parallel ST$, וגם ש-NS הוא הקוטר של המעגל החסום עליו נמצאים גם N ו-K, ולכן $SKNT$ הוא מלבן, ולכן KT הוא גם קוטר של המעגל החסום.

לכן הנקודה K היא הנקודה המרוחקת היותר מהישר BC של המעגל החסום. לכן הישר AK פוגש את הצלע BC בנקודת ההשרה של המעגל החסום מבחוץ, הרי קיימת הומותטיה עם מרכז ב-A שמעבירה את המעגל החסום למעגל החסום מבחוץ, שמעבירה את K לנקודת ההשקה. נקודת מפגש של AK עם BC היא בעצם P. כמו שראינו בתחילת הפתרון של שאלה ראשונה, AP חוצה את ההיקף, לכן התשובה היא

$$2(AB + BP) = 2 \cdot 2 = 4.$$

4. נקודה P נמצאת על המעגל החוסם של משולש ABC, והמרכזים של המעגלים החסומים מבחוץ לצלעות המשולש BC ו-AC הם I_A ו-I_B בהתאמה (תזכורת: מעגל חסום מבחוץ הוא מעגל שמשיק לצלע ולהמשכי שתי צלעות אחרות). הראו כי אמצע הקטע שמחבר את מרכזי המעגלים החוסמים של המשולשים I_ACP ו-I_BCP מתלכד עם מרכז המעגל החוסם של המשולש ABC.

פתרון. נשים לב, שחוצה הזווית החיצוני של C עובר דרך נקודות I_A ו-I_B, וגם דרך נקודה נוספת N שהיא אמצע הקשת ACB (קשת שמתחילה ב-A, מסתיימת ב-B ועוברת דרך C).

קל לראות, כי N היא אמצע הקטע I_AI_B. אכן, נקודות A ו-B רואות את הקטע I_AI_B בזווית ישרה (הרי חוצה זווית פנימי בכל קודקוד מאונך לחוצה זווית חיצוני), לכן נקודות A ו-B נמצאות על מעגל שקוטרו I_AI_B. המרכז של המעגל זה הוא אמצע הקטע I_AI_B, וניתן להגדירו גם בתור נקודה שנמצאת על הישר I_AI_B וגם על האנך האמצעי של AB, הרי מרכז המעגל נמצא במרחק שווה מכל שתי נקודות על המעגל. אבל הישר I_AI_B (שהוא חוצה הזווית החיצוני של C) פוגש את האנך האמצעי של AB רק ב-N.

צריך להוכיח, כי O שהוא מרכז המעגל החסום הוא אמצע הקטע שמחבר O_1 ו-O_2 שהם מרכזי המעגלים I_ACP ו-I_BCP בהתאמה. די ברור שהנקודות O, O_1 ו-O_2 על ישר אחד, הרי כולן נמצאות על האנך האמצעי של CP.
הומותטיה עם מקדם 2 ומרכז ב- C מעבירה את O, O_1 ו-O_2 לנקודות D, D_1 ו-D_2 בהתאמה, כך שהקטעים CD, CD_1 ו-CD_2 הם הקטרים של המעגלים ABCPN, I_ACP ו-I_BCP בהתאמה.
לכן הנקודות N, I_A ו-I_B רואות את הקטעים CD, CD_1 ו-CD_2 בהתאמה בזוויות ישרות, לכן עקבי האנכים מ-D , D_1 ו-D_2 על I_AI_B זה N, I_A ו-I_B. לכן $I_AI_BD_2D_1$ הוא טרפז, ו-DN הוא קטע אמצעים בטרפז זה. לכן D הוא האמצע של D_1D_2, ולכן O הוא האמצע של O_1O_2.

5. נתון מרובע קמור ABCD. הישרים BA ו-CD נפגשים בנקודה P והישרים AD ו-BC נפגשים בנקודה Q, כאשר D נמצא על הקטעים CP ו-AQ. נסמן ב-H את עקב האנך מ-D ל-PQ. הוכיחו שבמרובע ABCD ניתן לחסום מעגל, אך ורק כאשר הנקודה H רואה את המעגלים החסומים במשולשים ADP ו-CDQ באותה זווית.

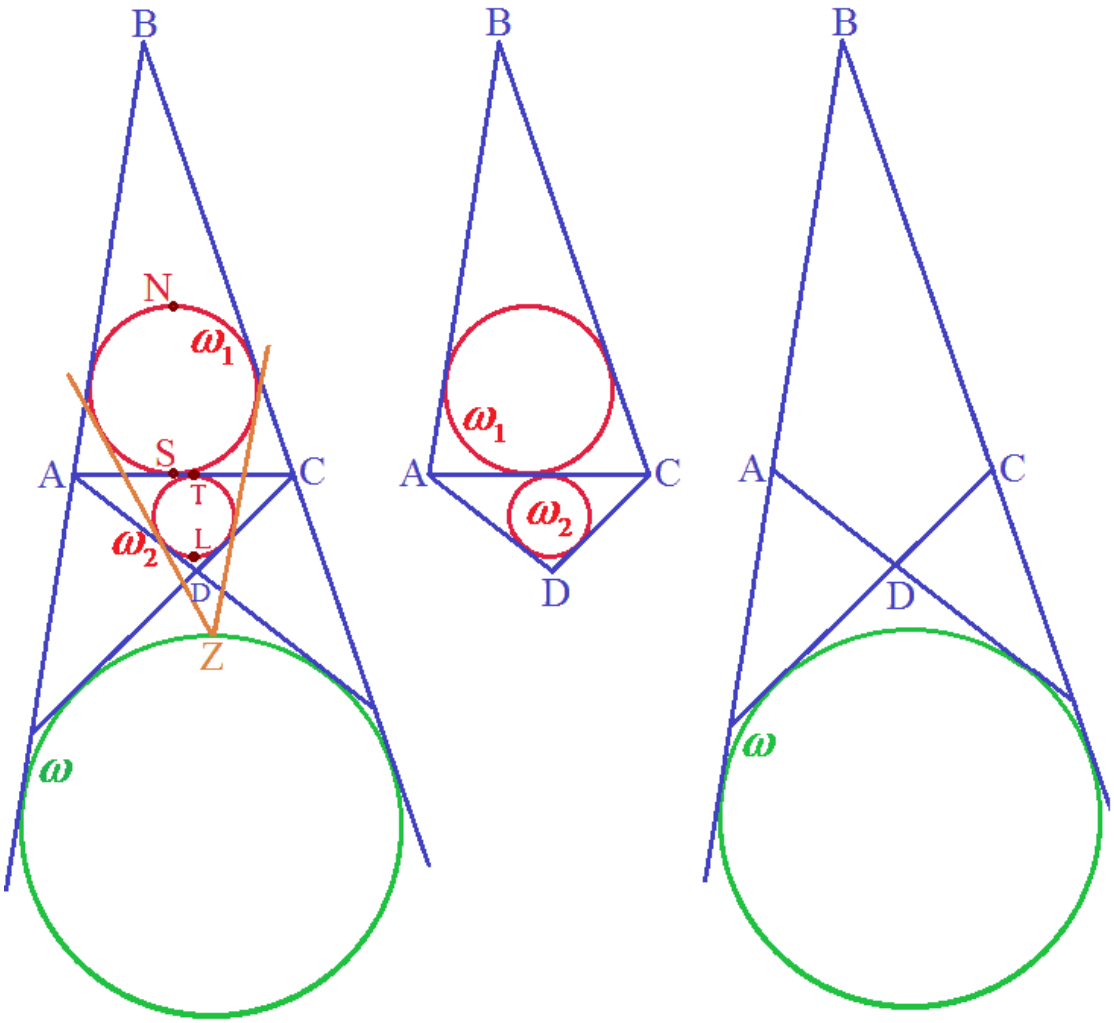
פתרון. אנחנו נוכיח עוד מספר תנאים שקולים על הדרך.
נסמן ב-ω_1 ו-ω_2 את המעגלים החסומים ב- במשולשים ADP ו-CDQ בהתאמה. את המרכזי המעגלים ω_1 ו-ω_2 נסמן ב-I ו-J בהתאמה, ואת רדיוסיהם r_1 ו-r_2. הישר IJ חוצה את הזווית בין הישרים ADQ ו-BDP.
נקודת מפגש של הישרים PI ו-QJ תסומן K.
נסמן ב- d, d_1 ו-d_2 את המרחקים מ-K, I ו-J בהתאמה לישר PQ.
הומותטיה עם מרכז ב-P ומקדם d/d_1 מעבירה את המעגל ω_1 למעגל שמרכזו K ורדיוסו $r_1 d/d_1$, שגם הוא משיק לישרים AB ו-CD. כמו כן, הומותטיה עם מרכז ב-Q ומקדם d/d_2 מעבירה את המעגל ω_2 למעגל שמרכזו K ורדיוסו $r_2 d/d_2$, שגם הוא משיק לישרים AD ו-BC. אם $r_1/d_1 = r_2/d_2$ אז זה אותו מעגל, לכן יש מעגל חסום במרובע ABCD.
גם ההפך נכון: אם קיים מעגל שחסום במרובע ABCD, מרכזו בהכרח K (הרי זו נקודה יחידה שמרחק ממנה ל-AB שווה למרחק ממנה ל-CD, וגם שמרחק ממנה ל-BC שווה מרחק ממנה ל-AD), וקיימות הומותטיות שמעבירות את המעגל שלנו למעגלים ω_1 ו-ω_2, ואז מהומותטיה נקבל גם את הזהות $r_1/d_1 = r_2/d_2$.

כעת נגדיר נקודה E, שהיא מפגש המשיקים המשותפים החיצוניים של ω_1 ו-ω_2 (נזכיר ש-D היא מפגש המשיקים הפנימיים). E, כמו גם D, היא נקודה שרואה את ω_1 ו-ω_2 באותה זווית. באופן כללי, כל הנקודות שרואות את ω_1 ו-ω_2 באותה זווית מהוות מעגל אפולוניוס (לפי הגדרה של מעגל אפולוניוס), וזה המעגל שקוטרו DE. די ברור גם, ש-E נמצאת על הישר PQ אך ורק כאשר מתקיימת הזהות $r_1/d_1 = r_2/d_2$, כלומר אך ורק כאשר ABCD מרובע חסום.

לכן נקודה H רואה את ω_1 ו-ω_2 בזוויות שוות אך ורק כאשר היא נמצאת על מעגל אפולוניוס שקוטרו DE, אך ורק כאשר $\sphericalangle DHE = 90^\circ$, אך ורק כאשר E נמצאת על האנך ב-H ל-DH, כלומר על PQ, כלומר אך ורק כאשר ABCD מרובע חוסם. מש"ל.

6. במרובע קמור ABCD מתקיים $BA \neq BC$. המעגלים החסומים במשולשים ABC ו-ADC יסומנו ω_1 ו-ω_2. נניח בנוסף כי קיים מעגל ω שמשיק להמשך BA מעבר ל-A ולהמשך BC מעבר ל-C שמשיק גם לקווים AD ו-CD. הוכיחו כי המשיקים החיצוניים המשותפים ל-ω_1 ו-ω_2 נפגשים על ω.

פתרון. בציורים שלנו AC אופקי, B מעל AC. נתחיל במספר טענות פשוטות בחשבון משיקים:
א. מהקיום של מעגל ω נובע כי $BA + AD = BC + CD$ (תמונה ימני).
ב. מזהות $BA + AD = BC + CD$ נובע כי נקודות ההשקה של AC עם ω_1, ω_2 סימטרית ביחס ל-AC.



לא נפרט הוכחות של שתי הטענות, כי זה מסקנה מיידית של שימוש חוזר בכך, ששתי משיקים מנקודה למעגל הם באותו אורך. נשאיר את זה כתרגיל לקורא.
נסמן את נקודה הגבוה ביותר של ω_1 ב-N, ואת הנקודה נמוכה ביותר S. נקודה עליונה של ω_2 תסומן T, והנקודה הנמוכה ב-L.

נקודת מפגש של משיקים החיצוניים של ω_1 ו-ω_2 שדובר עליה בניסוח השאלה תסומן Z.
בעצם ניתן להגדיר את Z בתור מרכז הומותטיה חיובית שמעבירה ω_1 ל-ω_2. מכאן רואים עוד דרך את Z: זו נקודת מפגש של TN ו-LS.
ובכן, לפי טענות א' ו-ב', S סימטריות ביחס לאמצע AC. מחשבון משיקים (כמו למשל בפתרון של שאלה 1) רואים כי מעגל חסום מבחוץ לצלע AC של משולש ABC משיק ל-AC ב-T. הומותטיה חיובית שמרכזה ב-B מעבירה את ω_1 לאותו המעגל החסום מחוץ, לכן ואת N ל-T. לכן-B, N, T על ישר אחד.
באופן דומה גם D, L, S על ישר אחד.

הומותטיה חיובית עם מרכז ב-B שמעבירה את ω_1 ל-ω, מעבירה את N לנקודה הצפונית של ω. לכן הנקודה הצפונית של ω נמצאת על הישר BNT.
הומותטיה שלילית עם מרכז ב-D שמעבירה את ω_2 ל-ω, מעבירה את L לנקודה הצפונית של ω. לכן הנקודה הצפונית של ω נמצאת על הישר DLS.

אבל ראינו שניתן להגדיר את Z בתור מפגש הישרים TN ו-LS. מצד שני, זה מתקיים עבור הנקודה הצפונית ביותר של ω. לכן הנקודה הצפונית ביותר של ω היא Z.
בפרט, Z נמצאת על ω, מש"ל.