תרגיל 13

1. במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו I. אמצעי הצלעות של המשולש ABC הם A_1, B_1, C_1. הראו שהישר IA_1 מחלק את ההיקף של המשולש $A_1B_1C_1$ לשני חלקים שווי אורך.

2. במשולש ABC (שאינו שווה-שוקיים) מרכז המעגל החסום יסומן I, ומרכז המעגל החוסם יסומן O. הישרים IA, IB, IC חותכים את המעגל החוסם פעם נוספת בנקודות A', B', C' בהתאמה. עקבי האנכים מ-I לצלעות BC, AC, AB יסומנו A_1, B_1, C_1 בהתאמה. הראו כי הישרים IO, A_1A', B_1B', C_1C' נפגשים בנקודה אחת.

3. על צלעות AC ו-BC של משולש ABC נמצאות נקודות Q ו-P בהתאמה. נתון בנוסף, כי $AQ = AB = BP = 1$, וכי נקודת החיתוך של AP ו-BQ נמצאת על המעגל החסום של משולש ABC. מצאו את ההיקף של משולש ABC.

4. נקודה P נמצאת על המעגל החוסם של משולש ABC, והמרכזים של המעגלים החסומים מבחוץ לצלעות המשולש BC ו-AC הם I_A ו-I_B בהתאמה (תזכורת: מעגל חסום מבחוץ הוא מעגל שמשיק לצלע ולהמשכי שתי צלעות אחרות). הראו כי אמצע הקטע שמחבר את מרכזי המעגלים החוסמים של המשולשים I_ACP ו-I_BCP מתלכד עם מרכז המעגל החוסם של המשולש ABC.

5. נתון מרובע קמור ABCD. הישרים BA ו-CD נפגשים בנקודה P והישרים AD ו-BC נפגשים בנקודה Q, כאשר D נמצא על הקטעים CP ו-AQ. נסמן ב-H את עקב האנך מ-D ל-PQ. הוכיחו שבמרובע ABCD ניתן לחסום מעגל, אך ורק כאשר הנקודה H רואה את המעגלים החסומים במשולשים ADP ו-CDQ באותה זווית.

6. במרובע קמור ABCD מתקיים $BA \neq BC$. המעגלים החסומים במשולשים ABC ו-ADC יסומנו ω_1 ו-ω_2. נניח בנוסף כי קיים מעגל ω שמשיק להמשך BA מעבר ל-A ולהמשך BC מעבר ל-C שמשיק גם לקווים AD ו-CD. הוכיחו כי המשיקים החיצוניים המשותפים ל-ω_1 ו-ω_2 נפגשים על ω.