<u>תרגיל 12</u>

משוואות פונקציונאליות (וכן אי-שוויונים פונקציונאליים) נפתרות באמצעות ערמה גדולה של נייר, שניים-שלושה עטים והמון רצון טוב לאלימות.

1. האם קיימת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיים $\left|f\left(x+y\right)+\sin x+\sin y\right|<2$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$?

תשובה. לא.

הערה. אם נחליף את "$<$" ב-"$\le$", אז פונקצית ה-0 תהיה פתרון.

פתרון. ניקח $x_1=y_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=-\frac{\pi}{2}$, $y_2=\frac{3}{2}\pi$. אז ברור ש-$x_1+y_1=\pi=x_2+y_2$, וגם ברור כי $\sin\left(y_1\right)=1$, מצד שני $\sin\left(x_1\right)=\sin\left(y_2\right)=-1$, ולכן לו הייתה קיימת פונקציה f אז היה $\left|f\left(\pi\right)+2\right|=\left|f\left(x_1+y_1\right)+\sin x_1+\sin y_1\right|<2$ ומצד שני $\left|f\left(\pi\right)-2\right|=\left|f\left(x_1+y_1\right)+\sin x_2+\sin y_2\right|<2$.

אבל זה לא יכול להיות.

2. האם קיימת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חסומה, כך ש-$f\left(1\right)>0$ ובנוסף לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$f^2\left(x+y\right)\ge f^2\left(x\right)+2f\left(xy\right)+f^2\left(y\right)\ ?$$

תשובה. לא.

פתרון. נבנה סדרה לפי הכלל הבא $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}$, כאשר $x_1=1$.

אז כאשר מציבים בנוסחה $y=\frac{1}{x}$, $x=x_n$, נקבל

$$f^2\left(x_{n+1}\right)=f^2\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\ge f^2\left(x_n\right)+2f\left(1\right)+f^2\left(y\right)\ge f^2\left(x_n\right)+2f\left(1\right)$$

אבל אם $f\left(1\right)=a>0$ חיובי אז $f^2\left(x_{n+1}\right)\ge2a+f^2\left(x_n\right)\ge\ldots\ge2an+a^2$ וזה הופך למספר גדול כרצוננו כאשר n מספיק גדול, לכן גם $f\left(x_n\right)$ אינו חסום ולכן גם בוודאי f לא חסום.

3. מצאו את כל שלשות הפונקציות $f,g,h:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ המקיימות לכל $x,y\in\mathbb{Q}$

$$f\left(x+y\right)+g\left(x-y\right)=2h\left(x\right)+2h\left(y\right)\ .$$

תשובה. $h\left(x\right)=ax^2+bx+s$, $f\left(x\right)=ax^2+2bx+4s$, $g\left(x\right)=ax^2+4t$
(כאשר a,b,s,t יכולים להיות מספרים ממשיים כלשהם).

פתרון. נציב פעם $y=x$ ופעם $y=-x$. נקבל:

$$f\left(2x\right)+g\left(0\right)=4h\left(x\right)$$

$$f\left(0\right)+g\left(2x\right)=2h\left(x\right)+2h\left(-x\right)\ .$$

נשים לב שאם מוסיפים ל- f קבוע u ול- h קבוע $\frac{u}{4}$ התנאי הנתון ממשיך להתקיים. כך גם אם מוסיפים ל- g קבוע v ול- h קבוע $\frac{v}{4}$, הנתון ממשיך להתקיים. לכן מספיק לפתור את המשוואה בתנאי $f(0)=0=g(0)$ ולהוסיף קבועים בסוף. אז

$$f(2x)=4h(x)$$
$$g(2x)=2h(x)+2h(-x)$$

אלה בעצם נוסחאות מפורשות עבור f ו- g באמצעות h: אם נחלק את x ב-2 נקבל

$$f(x)=4h\left(\tfrac{x}{2}\right)$$
$$g(x)=2h\left(\tfrac{x}{2}\right)+2h\left(-\tfrac{x}{2}\right)$$

כמובן h לא יכולה להיות פונקציה כלשהי; צריך שהתנאי הנתון יתקיים עבור h ושתי הפונקציות f,g שמוגדרות לפי נוסחאות שרשמנו

$$4h\left(\frac{x+y}{2}\right)+2h\left(\frac{x-y}{2}\right)+2h\left(\frac{y-x}{2}\right)=2h(x)+2h(y)$$
$$2h\left(\frac{x+y}{2}\right)+h\left(\frac{x-y}{2}\right)+h\left(\frac{y-x}{2}\right)=h(x)+h(y)$$

נסמן $z=\frac{x+y}{2}$, $\delta=\frac{x-y}{2}$. ניתן להציב $z,\delta\in\mathbb{Q}$ כלשהם, הרי לכל שני מספרים רציונאליים ניתן להגדיר $x=z+\delta$, $y=z-\delta$. אז

$$2h(z)+h(\delta)+h(-\delta)=h(z+\delta)+h(z-\delta)$$

במילים אחרות $h(z)-h(z-\delta)+k(\delta)=h(z+\delta)-h(z)$, כאשר $k(\delta)=h(\delta)+h(-\delta)$.

התכונה שאנחנו רואים כאן היא תכונה חשובה, שכדאי לדבר עליה בנפרד. נניח שיש לנו פונקציות $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ (סדרות בעצם) שמקיימות לכל $n\in\mathbb{Z}$

$$\varphi(n)-\varphi(n-1)+k=\varphi(n+1)-\varphi(n) \quad (*),$$

כאשר k מספר קבוע שלא תלוי ב- n.

מסתבר שהפונקציות מסוג זה אלה פולינומים ממעלה 2: כלומר $\varphi(n)=an^2+bn+c$.

קודם נראה שפולינומים ממעלה שנייה מקיימות את זה. נגדיר

$$(\Delta\varphi)(n)=\left(a(n+1)^2+b(n+1)+c\right)-\left(an^2+bn+c\right)=$$
$$=\left(\cancel{an^2}+2an+a+\cancel{bn}+b+c\right)-\left(\cancel{an^2}+\cancel{bn}+c\right)=$$
$$=2an+d$$

וקיבלנו, בעצם כמו שרצינו, ש- $\Delta\varphi$ היא סדרה הנדסית. לכן כל פולינום ממעלה שנייה מקיים תנאי (*).

מצד שני, בהינתן $\varphi(2)=\gamma$, $\varphi(1)=\beta$, $\varphi(0)=\alpha$ ניתן להגדיר פולינום ממעלה שנייה an^2+bn+c שמקבל את אותם הערכים בנקודות 0,1,2. הפולינום מקיים גם את

התנאי (*), ואם אותו הקבוע k (כי אפשר להציב 0, 1, 2). אבל (*) היא בעצם נוסחת נסיגה, לכן באינדוקציה ניתן לקבל שלכל מספר שלם $\varphi(n)=an^2+bn+c$.
ובכן, כל $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ שמקיים את (*) הוא פולינום ריבועי.

הערה. הפעולה לעבור מ-φ ל-$\Delta\varphi$ נקראת נגזרת דיסקרטית – זו גרסה של נגזרת עבור הסדרות. ניתן להכליל את הטענה שהוכחנו: אם נגזרת דיסקרטית של סדרה מסדר n מתאפסת, אז הסדרה היא פולינום מסדר n.

ובכן, מה שהוכחנו כי h על מספרים שלמים ניתן לרשום בתור ax^2+bx+c. מאותה סיבה את h על מספרים שהם מהסוג $x=\frac{m}{17}$ כאשר m מספר שלם כלשהו ניתן לרשום בתור $\tilde{a}x^2+\tilde{b}x+\tilde{c}$.
הנוסחה הזאת מתקיימת גם למספרים שלמים. לכן $ax^2+bx+c=\tilde{a}x^2+\tilde{b}x+\tilde{c}$. אבל לא יתכן שלמשוואה ריבועית אינסוף שורשים, לכן $a=\tilde{a}$, $b=\tilde{b}$, $c=\tilde{c}$. לכן בעצם אותה נוסחה $h(x)=ax^2+bx+c$ שמתקיימת למספרים שלמים נכונה גם לשלמים חלקי 17. בטיעון זה ניתן להחליף את 17 בכל מספר טבעי אחר, לכן הנוסחה מתקיימת לכל q. תחת ההנחה שהצבנו $f(0)=0=g(0)$ מקבלים בקלות (למשל מהצבה 0, 0 בנתון) כי $h(0)=0$, כלומר $h(x)=ax^2+bx$ לכל x רציונאלי תחת ההנחות הנוספות שעשינו. נבדוק האם כל $h(x)=ax^2+bx$ מקיימת את התנאי.

$$2h\left(\frac{x+y}{2}\right)+h\left(\frac{x-y}{2}\right)+h\left(\frac{y-x}{2}\right)=h(x)+h(y)$$

ברור שפונקציה $h(x)=x$ מקיימת את זה. גם הפונקציה $h(x)=x^2$, הרי

$$2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+\left(\frac{y-x}{2}\right)^2=x^2+y^2$$

$$2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=x^2+y^2$$

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{2}+\frac{x^2-2xy+y^2}{2}=x^2+y^2$$

וזה ברור. אבל התנאי הוא ליניארי על h, לכן גם כל ax^2+bx מקיים את התנאי.
ובכן, כל $h(x)=ax^2+bx$ עובד, ביחד עם

$$f(x)=4h\left(\tfrac{x}{2}\right)=ax^2+2bx$$

$$g(x)=2h\left(\tfrac{x}{2}\right)+2h\left(-\tfrac{x}{2}\right)=ax^2$$

חוץ מזה, הבטחנו בסוף להוסיף קבועים: מותר להוסיף קבוע ל-h וקבוע גדול פי 4 לפונקציה אחרת. כאשר עושים את זה, מגיעים לתשובה מלאה.

4. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות עבור $x,y\in\mathbb{R}$
$$f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)+f(x)+f(y).$$

תשובה. יש 3 פונקציות אפשריות: $f(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 2$, $f(x)=x$.
(הסימן $\equiv$, "שווה זהותית", אומר שהפונקציה שווה לקבוע לכל x).
פתרון. תחילה נציב $x=y=2$, ונקבל
$$\cancel{f(4)}+f(2)f(2)=\cancel{f(4)}+f(2)+f(2)$$
ואז מסתבר ש-$f(2)=b$ מקיים את המשוואה $b^2=2b$. למשוואה זו יש שני שורשים: 2 ו-0. לכן $f(2)$ שווה ל-2 או ל-0.
כעת נציב $x=y=1$. נקבל $f(1)+f(1)+f(1)=f(2)+f^2(1)$.
כלומר $a=f(1)$ מקיים משוואה ריבועית: $3a=b+a^2$.
אם $b=0$ נקבל שני שורשים a שווה ל-0 או ל-3.
אם $b=2$ נקבל $(a-2)(a-1)=a^2-3a+2=0$, כלומר גם כאן שני אפשרויות 1 ו-2. נבדוק את כל 4 המקרים:

א. $f(1)=0$, ואז $f(2)=0$. אז נציב בתנאי הנתון $y=1$ ונקבל
$$f(x+1)+0=f(x)+f(x)+0$$
$$f(x+1)=2f(x)$$
לכן אם $f(x)=0$, גם $f(x+1)=0$, וגם להפך. אבל $f(1)=0$, ניתן להראות באינדוקציה (קדימה ואחורה) שגם לכל n שלם $f(n)=0$.
נציב בתנאי הנתון $y=n$, כאשר n שלם. נקבל
$$f(x+n)+0=f(nx)+f(x)+0$$
אבל מהנוסחה $f(x+1)=2f(x)$ באינדוקציה רואים כי $f(x+n)=2^n f(x)$, ולכן
$$2^n f(x)=f(nx)+f(x)$$
$$(2^n-1)\cdot f(x)=f(nx)$$
מקרים פרטיים עבור $n=2,4$:
$$3\cdot f(x)=f(2x)$$
$$15\cdot f(x)=f(4x)$$
מכאן
$$15\cdot f(x)=f(4x)=f(2\cdot 2\cdot x)=3\cdot 3\cdot f(x)=9\cdot f(x)$$
$$6\cdot f(x)=0.$$
ובכן, $f(x)=0$ לכל x.

ב. $f(1)=1$, ואז $f(2)=2$. אז נציב בתנאי הנתון $y=1$ ונקבל

$$f(x+1)=f(x)+1$$

מכאן, באינדוקציה דו-כיוונית, לכל n שלם $f(n)=n$. כעת נציב בנתון במקום y מספר שלם n. נקבל $f(nx)+n+f(x)=f(x+n)+n\cdot f(x)$.

אבל ראינו ש-$f(x+1)=f(x)+1$, ומכאן קל להסיק $f(x+n)=f(x)+n$ לכל n שלם, ולכן נשאר $f(nx)=n\cdot f(x)$, לכל n שלם. מכאן 2 מסקנות:

אם נציב $x=\frac{m}{n}$, כאשר $m,n\in\mathbb{Z}$ נקבל $m=f(m)=n\cdot f\left(\frac{m}{n}\right)$, לכן לכל $q\in\mathbb{Q}$, נקבל $f(q)=q$.

אם מציב $n=-1$, נראה ש-f אי-זוגית.

במשוואה הנתונה $f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)+f(x)+f(y)$,
נציב $-x,-y$ במקום x,y ונקבל

$$-f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)-f(x)-f(y)$$

(כאן השתמשנו באי-זוגיות של f מספר פעמים.) נחבר את שתי המשוואות האחרונות ונקבל כי $2f(x)f(y)=2f(xy)$. כלומר f כפלית. לכן את הנתון ניתן לשכתב בצורה $f(x+y)+\cancel{f(x)f(y)}=\cancel{f(x)f(y)}+f(x)+f(y)$.

לכן f גם חיבורית. נוכיח גם כי f מונוטונית. אכן, לכל $z\geq 0$ ניתן לכתוב $z=x^2$ ואז

$$f(z)=f(x\cdot x)=f(x)\cdot f(x)>\left(f(x)\right)^2\geq 0.$$

לכן לכל שני מספרים $u<v$ ניתן לכתוב $v=u+z$, כאשר $z>0$ ולכן ואז

$$f(v)=f(u+z)=f(u)+f(z)\geq f(u).$$

ובכן, יש לנו פונקציה מונוטונית עולה (חלש) שמקיימת $f(q)=q$ לכל $q\in\mathbb{Q}$. מכאן ברור שלכל x ממשי $f(x)=x$.

ג. $f(1)=2$, ואז $f(2)=2$. אז נציב בתנאי הנתון $y=1$ ונקבל

$$f(x+1)+2f(x)=f(x)+f(x)+2$$
$$f(x+1)=2$$

אבל כל מספר ניתן להציג בתור $x+1$, לכן $f\equiv 2$.

ד. $f(1)=3$, ואז $f(2)=0$. אז נציב בתנאי הנתון $y=1$ ונקבל

$$f(x+1)+3f(x)=f(x)+f(x)+3$$
$$f(x+1)=3-f(x)$$

ניתן להציב $x+1$ במקום x, ואז נקבל

$$f(x+2)=3-f(x+1)=3-\left(3-f(x)\right)=f(x)$$

כלומר הפונקציה מחזורית עם מחזור 2. כעת נציב בנתון $y=2$ ונקבל

$$\cancel{f(x+2)}+0=f(2x)+\cancel{f(x)}+0$$

מתקבל $f(2x)=0$, לכל x ממשי, אבל כל מספר ממשי ניתן להציג בתור $2x$, ולכן $f\equiv 0$.

5. מצאו את כל הפונקציות $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, המקיימות לכל x,y ממשיים חיוביים $f\left(x+f(y)\right)=y\cdot f(xy+1)$.

תשובה. $f(x)=\frac{1}{x}$.

פתרון. נציב $x=\frac{a}{y}$, ונקבל נוסחה

$$f\left(\frac{a}{y}+f(y)\right)=y\cdot f(a+1) \quad (*).$$

כאשר a קבוע, ו-y משתנה, ניתן לקבל כל ערך באגף ימין. לכן גם ניתן לקבל כל ערך באגף שמאל, לכן f היא פונקציה על. מצד שני, בהינתן a קבוע, ו-y משתנה, מקבלים ערכים שונים ל-y שונים. לכן עבור y שונים, $\frac{a}{y}+f(y)$ שונים.

עם $y_1<y_2$ אבל $f(y_1)<f(y_2)$, ניתן לבחור a חיובי עבורו

$$\frac{a}{y_1}+f(y_1)=\frac{a}{y_2}+f(y_2)$$

וזה מפריך את הדבר הקודם שהוכחנו. לכן f מונוטונית יורדת חלש (כלומר אם $y_1<y_2$ אז $f(y_1)\geq f(y_2)$).

ננסה להוכיח חד-חד-ערכיות. אם יש $y_1<y_2$ כך ש-$f(y_1)=f(y_2)=c$ אז לכל $z\in[y_1,y_2]$ מתקיים $f(z)=c$.

היות ו-f היא פונקצית על, אז ניתן לבחור x,y עבורם $y_1<x+f(y)<y_2$. קל לראות שפונקציה f היא רציפה, הרי f פונקציה על ומונוטונית. לכן אם נבחר $\tilde{x},\tilde{y}$ מספיק קרובים ל-x,y בהתאמה אבל שונים מהם, כך ש-$x\cdot y=\tilde{x}\cdot\tilde{y}$, אז $y_1<\tilde{x}+f(\tilde{y})<y_2$.

אז ניתן לקבל

$$c=f\left(x+f(y)\right)=y\cdot f(xy+1)$$
$$c=f\left(\tilde{x}+f(\tilde{y})\right)=\tilde{y}\cdot f(\tilde{x}\cdot\tilde{y}+1)=\tilde{y}\cdot f(xy+1)$$

לכן $\tilde{y}=y$ בסתירה להנחה. ובכן f חח"ע.

עבור מספר A שהוא מספיק גדול ניתן בחור $x=A-f(y)$ ואז

$$\frac{f(A)}{y}=f(xy+1)=f\left(\left(A-f(y)\right)\cdot y+1\right)=f(A').$$

כאשר $A'=Ay-y\cdot f(y)+1$. נשים לב, שבהינתן y, אם A מאוד גדול אז גם A' די גדול. לכן ניתן להגדיר $A"=A'z-z\cdot f(z)+1$ שמקיים

$$\frac{f(A)}{yz}=\frac{f(A')}{z}=f(A").$$

אז $A"=A'z-z\cdot f(z)+1=\big(Ay-y\cdot f(y)+1\big)z-z\cdot f(z)+1$.

מצד שני, היינו יכולים להציב מלכתחילה yz במקום y, ולקבל

$$\frac{f(A)}{yz}=f\Big(\big(A-f(yz)\big)\cdot yz+1\Big)$$

אבל אם $f(A")=f\Big(\big(A-f(yz)\big)\cdot yz+1\Big)$ אז היות ו- f חח"ע

$$\big(Ay-y\cdot f(y)+1\big)z-z\cdot f(z)+1=A"=\big(A-f(yz)\big)\cdot yz+1$$
$$-y\cdot f(y)+1-f(z)=-f(yz)\cdot y$$

נוסחה אחרונה נכונה לכל y,z כי לכל y,z קיים A מספיק גדול שגורם להוכחה לעבוד.
כאשר $z\to\infty$ אז $f(z)\to 0$ וכן $f(yz)\to 0$, כלומר $-y\cdot f(y)+1=0$ כלומר לכל y מתקיים $f(y)=\frac{1}{y}$.

6. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות

$$f\Big(x^2+y^2+2f(xy)\Big)=f(x+y)^2.$$

תשובה. הפונקציות האפשריות הן $f(x)=0$, $f(x)=x$, ולכל $X\subset\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$ מתקבלת פונקציה $f(x)=\begin{cases}1, & x\notin X\\ -1, & x\in X\end{cases}$.

פתרון. נציב $z=x+y$, $t=xy$. בהינתן $t,z\in\mathbb{R}$ קיימים $x,y\in\mathbb{R}$ שנותנים כאלה t,z אם ורק אם $4t\le z^2$. בתנאי זה מתקיים $f\Big(z^2-2t+2f(t)\Big)=f(z)^2$.
אם נסמן $g(x)=2\big(f(x)-x\big)$ נקבל

$$f\Big(z^2+g(t)\Big)=f(z)^2 \qquad (1)$$ כל עוד $4t\le z^2$.

נסמן $c=g(0)=2f(0)$, ואז כשמציבים 0 ב-(1) רואים כי

$$f\big(z^2+c\big)=\big(f(z)\big)^2 \qquad (2)$$ לכל $z\in\mathbb{R}$.

לו c היה שלילי, היינו מצליחים למצוא z עבורו $z^2+c=0$, ואז היינו מקבלים

$$0>\frac{c}{2}=f(0)=f\big(z^2+c\big)=\big(f(z)\big)^2\ge 0$$

כלומר $0>0$. זה לא יתכן, לכן $c\ge 0$.
בנוסף, לכל $x\ge c$ ניתן למצוא z ממשי עבורו $z^2+c=x$, ולכן

$$f(x)=f\left(z^2+c\right)=\left(f(z)\right)^2\geq 0 .$$

כלומר

$$f(z)\geq 0 \quad , \text{לכל } x\geq c . \qquad (3)$$

אם $g(x)$ קבוע, אז $f(x)=x+c$ לכל x, ואז

$$c+\left(x^2+y^2+2(c+xy)\right)=(c+x+y)^2$$

$$3c=c^2+2c(x+y)$$

זה מתקיים לכל x ו- y אך ורק אם $c=0$. כך מקבלים תשובה אחת, $f(x)=x$.

נניח כי g אינו קבוע, כלומר קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $g(a)-g(b)=d>0$.
עבור K גדול מספיק, לכל $u,v\geq K$ המקיימים $v^2-u^2=d>0$, מתקיים גם $u^2+g(a)=v^2+g(b)$, ולכן לפי (1) ו-(3) מתקיים גם $f(u)=f(v)$. מכאן מתקבל גם $g(u)-g(v)=2(v-u)=2\cdot\dfrac{v^2-u^2}{v+u}=\dfrac{2d}{u+\sqrt{u^2+d}}$.
מכאן קל לראות, שקיים $\delta>0$, כך שכל מספר בתחום $[\delta,2\delta]$ ניתן להציג בצורה $g(u)-g(v)$, כאשר u,v חסומים מלמעלה על ידי מספר M מסוים.
נבחר x,y כלשהם, המקיימים $y>x>2\sqrt{M}$ וגם $\delta<y^2-x^2<2\delta$. לפי השיקולים שראינו, קיימים $u,v<M$ כך ש- $g(u)-g(v)=y^2-x^2$, כלומר

$$x^2+g(u)=y^2+g(v) .$$

היות ו- $x^2\geq 4u$, $y^2\geq 4v$, לפי (1) מקבלים $f(x)^2=f(y)^2$. בנוסף, אם נניח להה"כ כי $4M>c^2$, נסיק לפי (3) כי $f(x)=f(y)$. היות וזה מתקיים לכל $x,y\geq 2\sqrt{M}$ שמקיימים $y^2-x^2\in[\delta,2\delta]$ (כלומר מספיק קרובים), ניתן לראות כי $f(x)$ נהיה קבוע עבור ערכים מספיק גדולים, כלומר קיימים k,N כך ש- $f(x)=k$ לכל $x>N$.
עם נציב $x>N$ ב-(2) נראה כי $k^2=k$, כלומר k הוא 0 או 1.
לפי (2), קל לראות כי $f(-z)=\pm f(z)$, ולכן $|f(z)|\leq 1$ כאשר $z\leq -N$.
לכן $g(u)=2f(u)-2u$ היא פונקציה לא חסומה. לכן לכל z קיים t עבורו $z^2+g(t)>N$, וכמסקנה $\left(f(z)\right)^2=f\left(z^2+g(t)\right)=k=k^2$. לכן $f(z)=\pm k$ לכל x.
ובכן, אם $k=0$ אז $f\equiv 0$ וברור שזה פתרון תקין.
נבדוק את המקרה $k=1$. אז $c=2f(0)=2$, הרי $c\geq 0$. לפי (2), מקבלים $f(x)=1$ לכל $x\geq 2$.
נניח כי $f(t)=-1$ עבור $t<2$ מסוים, $g(t)=2(-1-t)$.

אז $t-g(t)=3t+2>4t$. אם $t-g(t)\geq 0$, ניתן למצוא z עבורו $z^2=t-g(t)$,
ואז לפי (1) נקבל $f(t)=-1=\left(f(z)\right)^2=f\left(z^2+g(t)\right)$, וזה לא יתכן.
ובכן, אם $f(t)=-1$ אז $t-g(t)<0$, אבל $t-g(t)=3t+2$, כלומר $3t+2<0$,
במילים אחרות $t<-\frac{2}{3}$.
ובכן, כל עוד $f(t)=-1$, אז $t<-\frac{2}{3}$. כלומר קבוצת הנקודות עבורן $f(t)=-1$ היא
תת-קבוצה של $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$.

מצד שני, אם ניקח $X\subset\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$ כלשי, ונגדיר $f(x)=\begin{cases}1, & x\notin X\\ -1, & x\in X\end{cases}$.

אז $x^2+y^2+2f(xy)\geq 0$ כל עוד $xy\geq -\frac{2}{3}$, ואם $xy\leq -\frac{2}{3}$ אז $|x|\cdot|y|\geq\frac{2}{3}$, ואז קל
לראות כי $x^2+y^2\geq\frac{4}{3}$, ואז $x^2+y^2+2f(xy)\geq\frac{4}{3}-2\geq-\frac{2}{3}$.
ובכן, בכל מקרה $x^2+y^2+f(xy)\geq-\frac{2}{3}$.
אז $f\left(x^2+y^2+2f(xy)\right)=1=f(x+y)^2$.