תרגיל 12

משוואות פונקציונאליות (וכן אי-שוויונים פונקציונאליים) נפתרות באמצעות
ערמה גדולה של נייר, שניים-שלושה עטים והמון רצון טוב לאלימות.

1. האם קיימת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיים $\left|f\left(x+y\right)+\sin x+\sin y\right|<2$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$?

2. האם קיימת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חסומה, כך ש-$f\left(1\right)>0$ ובנוסף לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים
$f^2\left(x+y\right)\geq f^2\left(x\right)+2f\left(xy\right)+f^2\left(y\right)$?

3. מצאו את כל שלשות הפונקציות $f,g,h:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ המקיימות עבור כל $x,y\in\mathbb{Q}$
$f\left(x+y\right)+g\left(x-y\right)=2h\left(x\right)+2h\left(y\right)$.

4. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות עבור כל $x,y\in\mathbb{R}$
$f\left(x+y\right)+f\left(x\right)f\left(y\right)=f\left(xy\right)+f\left(x\right)+f\left(y\right)$.

5. מצאו את כל הפונקציות $f:\left(0,\infty\right)\to\left(0,\infty\right)$, המקיימות לכל x,y ממשיים חיוביים
$f\left(x+f\left(y\right)\right)=y\cdot f\left(xy+1\right)$.

6. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות לכל x,y ממשיים
$f\left(x^2+y^2+2f\left(xy\right)\right)=f\left(x+y\right)^2$.