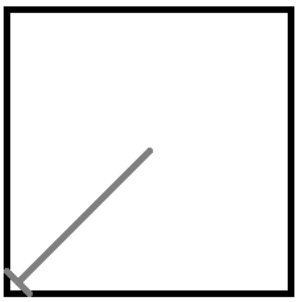
תרגיל 11

1. מלך שח לבן נמצא במשבצת מרכזית של לוח משבצות 2001×2001, וכלב שחור נמצא בפינה של הריבוע. בכל פעם מלך עושה מהלך אחד (לפי הכללים הרגילים, משבצת אחת במאונך או במאוזן או באלכסון) ואז הכלב עושה 5 מהלכים במאונך או במאוזן (או גם וגם), כאשר בכל מהלך הכלב נשאר צמוד להיקף של הלוח. המלך מנצח אם הוא מגיע להיקף של הלוח. הכלב אוכל את המלך אם הוא נמצא במשבצת שסמוכה לפי צלע למשבצת שהמלך נמצא בה. האם המלך יכול לנצח?

2. זאב נמצא במרכז ריבוע, ובכל פינה נמצא כלב. מטרת הכלבים היא שהזאב יישאר בתוך הריבוע, והזאב רוצה להימלט. הכלבים יכולים לנוע על ההיקף בלבד.
א. שני כלבים יותר חזקים מהזאב, אבל הזאב חזק מכלב אחד. הכלבים מהירים פי 1.5 מהזאב. מי מנצח?
ב. הכלבים שמנו קצת יחסית לסעיף הקודם. כעת אפילו כלב אחד יכול לנצח זאב, אבל הכלבים זריזים מהזאב רק פי 1.4. מי מנצח?

תשובות. א. כלבים. ב. זאב.
פתרון. א. נעביר דרך הזאב שני קווים מלוכסנים שמקבילים לאלכסוני הריבוע. הקווים האלה יזוזו כאשר הזאב זז. משימה של כל כלב הוא להישאר על קצה ספציפי של קו מלוכסן (בהתחלה זה מתקיים). קו מלוכסן יכול לנוע במהירות מרבית ששווה למהירות מרבית של הזאב, וקצה שלו יכול לנוע פי $\sqrt{2}$ יותר מהר, אבל $\sqrt{2}<1.5$ לכן כל כלב מסוגל להצליח במשימתו. אז כשזאב יגיע לשפת הריבוע, בהכרח יפגשו אותו שני כלבים.

ב. לו הכלבים היו נמצאים באמצעי הצלעות, אז היו חוסמים את הזאב בקלות: הרי כל כלב מסוגל להישאר על האנך מזאב לצלע מסוימת של ריבוע, ואז כל כלב יחסום לזאב יציאה מצלע אחד. אז הזאב לא היה מסוגל להימלט.



אבל במצב ההתחלתי שיש, לזאב לא קשה להימלט. הזאב רץ לכיוון הפינה, ואז רגע לפני שמגיע לפינה פונה ב-90° ימינה או שמאלה (איפה שאין כלב) ובורח.
נסביר למה זה יכול לעבוד. לחישובים ניקח את צלע הריבוע כיחידת מדידה. מסלול הזאב אורכו $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 3 כלבים רחוקים נמצאים במרחק $1-\varepsilon$ לפחות מנקודת היעד של הזאב, ולכן עבור ε קטן מספיק הם לא יספיקו לתפוס אותו. הכלב הפינתי יכול להגיע לכל אחד מנקודות היעד של הזאב, אך לא בו-זמנית. הזאב ברגע שיגיע לנקודת התפצלות ירוץ לצלע שהכלב הפינתי לא נמצא עליו (אם הכלב נשאר בקודקוד או חזר אליו, הזאב יכול לבחור את כיוון הפנייה באקראי). אז הזאב צריך לעבור $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, והכלב לפחות ε, כלומר הכלב הפינתי גם לא יצליח לתפוס אותו.

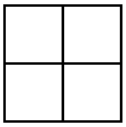
3. אותו הסיפור, אבל הזאב זריז מהכלבים, ויש 100 כלבים, במצב התחלתי שהכלבים בוחרים. האם הזאב יצליח להימלט?

תשובה. כן.
פתרון. שוב, יחידת המדידה של מרחק תהיה צלע הריבוע, ויחידת מדידה של המהירות תהיה מהירות הכלב. מהירות הזאב תהיה $w>1$. המהירות היחסית של זאב ביחס לכלב (אם הם יעשו מרוץ תחרותי) היא $w-1$.
הזאב יתקרב לצלע למרחק ε ויתחיל לרוץ במהירות מרבית לאורך הצלע. אם הזאב רואה, שבמרחק ε מנקודה הקרובה אליו אין כלבים, הוא יכול לרוץ לצלע ולהימלט. אם בקטע זה באורל 2ε נמצא כלב, נגיד שהכלב הזה משגיח על הזאב. הזמן שכלב מסוגל להשגיח על הזאב אינו עולה על $\frac{2\varepsilon}{w-1}$, והמרחק שזאב יעבור בזמן זה הוא $\frac{2\varepsilon}{w-1}\cdot w$.
כעת נבחר ε מספיק קטן כך ש-$\frac{2\varepsilon}{w-1}\cdot w<\frac{1}{1000}$, כלומר $\varepsilon<\frac{w-1}{2000\cdot w}$.
ובכן, הזאב יתקרב לצלע למרחק ε, וירוץ במקביל לצלע, עד שהוא יראה שאף כלב לא משגיח עליו ואז הוא יברח. כל כלב מסוגל להשגיח רק על $\frac{1}{1000}$ מהצלע, ויש 100 כלבים, לכן אחרי שזאב יעבור מרחק לא יותר מ-0.011 לאורך הצלע הוא יוכל לברוח.

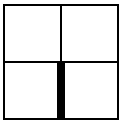
4. בפינת החדר שצורתו ארבעון משוכלל, נמצא עכבר שמסוגל לרוץ לאורך המקצועות, אשר מהיר פי 2.01 מכל אחד משני החורפנים המעופפים שנמצאים בחדר. האם הוא יוכל לשרוד?

תשובה. כן.
פתרון. כמובן, אסור לעכבר להישאר לנצח בפינה, כי עלול להגיע לשם חורפן מעופף. לכן בשלב מסוים העכבר יכול לצאת לאורך אחד המקצועות לכיוון של קודקוד אחר. שניים מהמקצועות בוודאי יכולים להיות חסומים, הרי יש שני חורפנים. אבל בכל פינה יש 3 מקצועות.
אנו נוכיח, שתמיד יש מקצוע שהעכבר יכול לברוח לאורכי לפינה אחרת של חדר. טענה זאת מיד מעניקה חיי נצח לעכבר, הרי ניתן להשתמש בטענה זו כמה פעמים שרוצים.
נניח שעכבר יוצא לאורך המקצוע לקודקוד אחר. מה התנאי לכך, שאחד החורפנים יוכל לתפוס אותה?
נניח שעכבר יוצא מקודקוד A אל קודקוד B, וחורפן נמצא בנקודה M. התנאי הוא, לכל נקודה X על AB האורך AX קטן מ-2.01 כפול MX, אחרת החורפן יוכל להגיע ל-X לפני העכבר. הקטע MX גדול מהגובה מנקודה X במשולש MAX. יתכן גם שיש שוויון, אם בוחרים את X כך שהזווית AMX תהיה ישרה. ובכן, הנקודה X המסוכנת ביותר עבור העכבר היא נקודת המפגש של הקו AB עם המישור שעובר דרך M ומאונך ל-AM. בנקודה זו יחס המרחקים הוא היחס בין היתר לבין הניצב מול זווית שגודלו AMB במשולש ישר זווית (הידוע גם בשם סינוס). בכל נקודה אחרת היחס יהיה יותר טוב לעכבר.
כידוע, במשולש ישר זווית שיש זווית 30°, הניצב הקצר הו קטן פי 2 בדיוק מהיתר. לכן אם הזווית AM יוצר עם המקצוע גדולה או שווה ל-30°, אז החורפן לא משגיח על

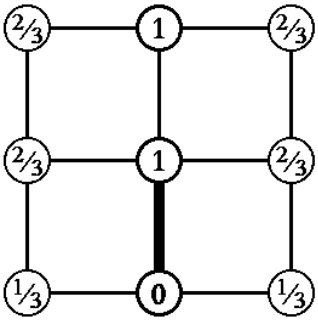
המקצוע הזה, כלומר העכבר יוכל לעבור עד הקודקוד השני של המקצוע בלי שהחורפן יתפוס אותו (כל עוד שהחורפן השני לא משגיח על מקצוע זה).
לפי אי-שוויון המשולש הכדורי, בהינתן 3 קרניים OX, OY, OZ מקודקוד משותף, אז הזווית בין OX ל-OY פלוס הזווית בין OY ל-OZ קטנה או שווה לזווית בין OX לבין OZ.
מכיוון שזווית בין כל שני מקצועות בארבעון משוכלל שווה ל-60°, החורפן לא יצליח להשגיח על יותר מאשר מקצוע אחד, לכן יש מקצוע שאף חורפן לא משגיח עליו, והעכבר יוכל לברוח דרכו.




5. לכל אחת מהרשתות בציורים: בפינה אחת נמצא קוף, ובפינה אחרת נמצאים שני שומרים. הקוף מהיר פי 3 מהשומרים. האם יוכלו לתפוס אותו?

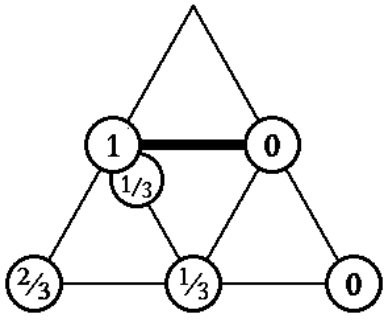


תשובה: כן.
פתרון. מרובע: נסמן קטע אחד, שמקשר את מרכז הרשת לאמצע הצלע. תפקיד של שומר ראשון יהיה לאבטח את הפרוזדור הזה. הוא מסוגל לעשות את זה.



נגדיר פונקציה על כל הרשת. בכל קודקוד נגדיר פונקציה כמו שרשום בציור, ובכל קטע נשלים את הערכים כך שפונקציה בכל קטע תהיה ליניארית. הערך של פונקציה מגדיר לכל נקודה ברשת את **הצל** שלו בקטע המסומן. אז שומר ראשון יכול להגיע לקטע המסומן ולתפוס שם את הצל של הקוף (הרי בקטע סגור לא קשה לתפוס כל דבר). לאחר מכן הוא צריך כל הזמן לעקוב אחרי הצל של הקוף. כל עוד הקוף לא מגיע לקטע המסומן, זה אפשרי, הרי מחוץ לקטע המסומן ערכי הפונקציה משתנים לפחות פי 3 יותר לאט בכל קטע. אם הקוף יגיע לקטע המסומן, הוא יפגוש מיד את השומר הראשון.
אם הקוף לא מגיע לקטע המסומן, תנועתו מוגבל לרשת מסוג עץ, שבה השומר השני יכול לתפוס אותה (באמצעות הורדת ענפים).

משולש. בהתחלה השומרים יגיעו לקודקודים של קטע האמצעים האופקי הראשון לקודקוד שמסומן 0, והשני לקודקוד שמסומן 1. כרגע יש 3 מצבים: או שהקוף מעל הקטע אמצעים המודגש, או עליו, או מתחתיו.

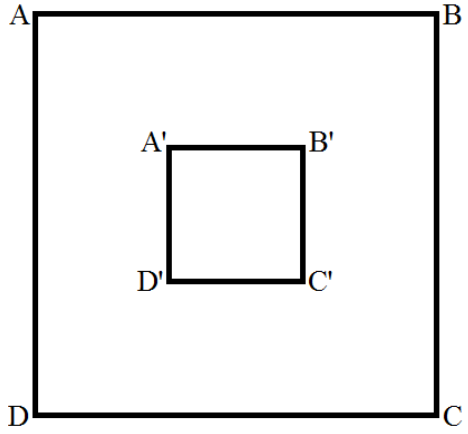


בשני המצבים הראשונים קל לתפוס הקוף, הרי הוא נמצא בפרוזדור סגור שמשני קצותיו שומרים. לכן מרגע זה נניח שהקוף מתחת לקטע אמצעים.
נגדיר פונקציה על החלק התחתון של הרשת. בכל קודקוד הערך של הפונקציה הוא מה שרשום, בקטע שמחבר את קודקוד שמסומן 1 לאמצע של הצלע באופקי הפונקציה שווה $\frac{1}{3}$, ובכל קטע אחר היא פונקציה ליניארית שערכים שלה בקצוות שווים לערכים הנתונים. לכל נקודה בחלק התחתון של הרשת ניתן להגדיר **צל** שלה על הקטע המודגש בהתאם לערך של הפונקציה. המשימה של השומר הראשון היא לתפוס את הצל של קוף ולעקוב אחריו. זה אפשרי, הרי הקוף לא יכול

לעבור על הקטע שהפונקציה שם היא $\frac{1}{3}$ קבוע, הרי בקודקוד שמסומן 1 נמצא השומר השני, ועל כל קטע אחר הערכים של הפונקציה משתנים לפחות פי 3 יותר לאט מאשר על הקטע המסומן.
אחרי שהשומר הראשון יתפוס את הצל של הקוף, השומר השני יתקדם לכיוון אמצע הצלע התחתון, לאורך הקטע שבוא ערכי הפונקציה $\frac{1}{3}$ קבוע. בזמן הזה הקוף לא יוכל להגיע לקטע המודגש, בגלל שהשומר הראשון צד את הצל שלו. אחרי שהשומר השני יגיע לנקודה נמוכה ביותר, יהיה קל ממש לתפוס את הקוף כי האזור שהקוף יכול להימצא בו בלי להגיע לקטע מודגש הוא עץ.

6. במרכז הריבוע נמצא שוטר, באחד מקודקודיו – פושע. השוטר יכול לרוץ לאורך הריבוע, והפושע – רק על צלעותיו. השוטר מסוגל לירות לאורך צלע של ריבוע, לכן אם ברגע מסוים השוטר והפושע יהיו על צלע אחת, השוטר יצליח לתפוס אותו. עבור איזה יחס מרבי בין המהירויות שלהם ינצח השוטר?

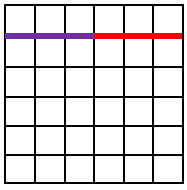
תשובה: השוטר ינצח אם מהירותו גדולה משליש מהירות הפושע.



פתרון. נניח שמרכז הריבוע ABCD הוא $(0,0)$, צלעות הריבוע מקבילים לצירים (כמו בציור), והצלע שלו היא באורך 1, ומהירות הפושע 1.
לכל נקודה על היקף הריבוע, נגדיר את הצל שלה: נקודה שנמצאת בשליש דרך ממרכז הריבוע אליה. אז הצל נע פי 3 יותר לאט מהפושע.
נניח שמהירות השוטר הוא גדול משליש מהירות הפושע. במקרה זה השוטר יכול לתפוס את הצל של הפושע. נניח שבשלב זה הפושע נמצא על AB, ואז השוטר נמצא על A'B'.

בשלב השני השוטר יתקרב לצלע AB, כאשר הוא ישמור על הכלל: קואורדינאטת ה-x של הפושע שווה לשליש קואורדינאטת ה-x של השוטר.
התוצאה מזה יכולה להיות אחד מהשניים: או שהשוטר מתקרב (במהירות שגדולה ממהירות קבועה מסוימת) לצלע AB, או שהפושע יגיע לקודקוד A (ואז השוטר יהיה ב-$x=-\frac{1}{3}$), או שהפושע יגיע לקודקוד B (ואז השוטר יהיה ב-$x=\frac{1}{3}$).

נניח שהפושע יגיע לקודקוד A (המקרה של קודקוד B נפטר באופן דומה).
אם הפושע יגיעה לקודקוד A, השוטר ישחק כך: כל עוד שהפושע נמצא על הצלע AB, השוטר ירוץ ישר אל הצלע AB, ואם הפושע יעבור לצלע AD, השוטר ירוץ ישר אל הצלע AD. אז לפני שהפושע יספיק להגיע לקודקוד B או D, השוטר יגיע לצלע עליה ימצא הפושע.



כעת נניח שמהירות השוטר היא קטנה מ-$\frac{1}{3}$ מהירות הפושע. אז הפושע יוכל לשמור על חייב בשיטה די פשוטה. נחלק את הלוח ל-6×6 משבצות שוות. נניח שהפושע נמצא בהתחלה באמצע הצלע הצפונית. עם השוטר מגיע לשורה אחרונה, הפושע יתחיל לרוץ. אם השוטר מגיע מהצד המזרחי (חוצה את הקו

האדום בציור) אז הפושע ירוץ לאמצע הצלע המערבי, ואם השוטר מגיע מהצד המערבי (חוצה את הקו הסגול בציור) הפושע ירוץ לאמצע הצלע המזרחי. קל לראות שהפושע יברח מהצלע הצפונית לפני שהשוטר יגיע לשם (הרי הפושע יכול לעבור 3 משבצות בזמן שהשוטר יעבור משבצת אחת), וגם שהפושע יגיע לאמצע הצלע האנכית לפני שהשוטר יגיע למשבצות שסמוכות לצלע זה (הרי הפושע עובר 6 משבצות תוך פחות זמן מאשר השוטר יעבור שתי משבצות). הפושע יישאר באמצע צלע אנכי עד שהשוטר יגיע לשורה שסמוכה לצלע

נשאר המקרה של מהירות השוטר שווה לשליש מהירות הפושע. גם במקרה זה הפושע יצליח לשרוד, אבל הוא יצטרך להיות קצת יותר מתוחכם. נשאיר מקרה זה כנקודה למחשבה עבור הקורא שמספיק קשוח.